

TEMA " B "

CONOCIMIENTOS BASICOS DEL DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS

Respuesta de Edificios al Movimiento Sísmico

Dr. Eduardo Miranda

Lecciones de Sismos Recientes y Efectos de los Sismos en las Construcciones

M. en C. Enrique del Valle

Diseño Sísmico de Acuerdo al Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal

Dr. Roberto Meli

Ductilidad y Diseño Estructural de Edificios de Concreto Reforzado

Dr. Yoshiaki Nakano

Comportamiento Sísmico de las Construcciones de Acero

Dr. Toshibumi Fukuta

RESPUESTA DE EDIFICIOS AL MOVIMIENTO SISMICO

Eduardo Miranda¹

INTRODUCCION

La respuesta sísmica de un edificio depende tanto de las propiedades mecánicas y dinámicas del edificio como de las características del movimiento de terreno al que se ve sometido. El objetivo de esta parte del seminario es el presentar algunos conceptos básicos de dinámica estructural que permitan el entender los principales factores que afectan la respuesta sísmica de los edificios.

DIFERENCIA ENTRE CARGAS ESTATICAS Y CARGAS DINAMICAS

Una carga *estática* es aquella cuyo valor no cambia con el tiempo. Un ejemplo de carga estática lo representan las cargas muertas ya que estas permanecen constantes (su valor no cambia) con el paso del tiempo.

Una carga o excitación *dinámica* es aquella cuya intensidad es función del tiempo, o sea que su intensidad varía con el tiempo. Un sismo es una excitación dinámica ya que las aceleraciones del terreno cambian de valor en cada fracción de segundo

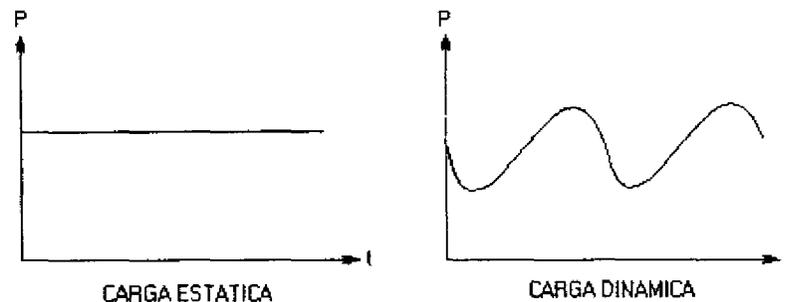


Fig. 1. Diferencia entre una carga estática y una carga dinámica.

SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD

Para poder estimar la respuesta sísmica de una estructura el ingeniero civil especialista en estructuras se vale de un modelo matemático cuyas propiedades mecánicas y dinámicas se procura sean las mismas que posee la estructura. Uno de los modelos más simples y más empleados para estimar la respuesta sísmica de edificios es el *Sistema de un grado de libertad*. Este modelo se caracteriza por ser un sistema dinámico en el que la masa está concentrada en un solo punto (sólo existe una masa).

¹Asesor en respuesta sísmica de edificios en el Centro Nacional de Prevención de Desastres.

Con fines de ingeniería estructural, el sistema de un grado de libertad está representado como una estructura de un sólo piso como el mostrado en la figura 2 en el que las columnas no tienen masa y están empotradas en su base. Toda la masa se encuentra concentrada en el techo de la estructura el cual se considera rígido (el techo en sí no se deforma sólo las columnas).

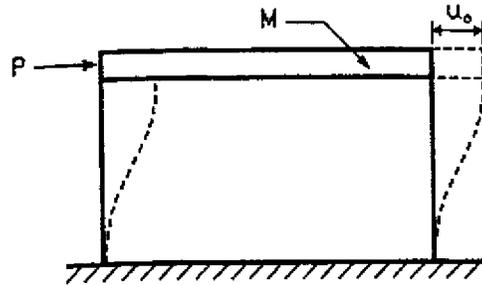


Fig. 2. Sistema de un grado de libertad sin amortiguamiento.

Si a esta estructura se le aplicara una fuerza lateral P que produjera en el techo un desplazamiento lateral u_0 y luego se le quitara en forma repentina, ésta oscilaría de un lado al otro de su posición de equilibrio en un movimiento que se le conoce como vibración libre. Esta oscilación continuaría siempre con una amplitud igual a u_0 como se muestra en la figura 3.

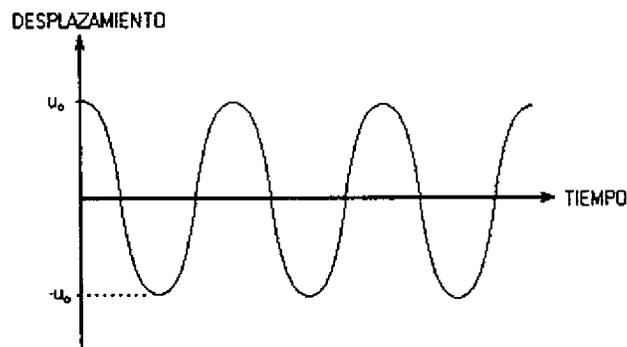


Fig. 3. Vibración libre en un sistema de un grado de libertad sin amortiguamiento.

Este tipo de respuesta, desde luego no es realista, ya que, intuitivamente uno espera que la amplitud de las oscilaciones disminuya poco a poco hasta detenerse por completo. Con el objeto de introducir este fenómeno al sistema de un grado de libertad se le agrega un elemento que disipe energía. Normalmente el tipo de elemento que se considera es un amortiguador de tipo viscoso (con amortiguamiento tipo Coulomb). Así pues los elementos que forman el sistema de un grado de libertad son los siguientes: una masa M , una estructura de un piso con rigidez lateral K y un amortiguador de tipo viscoso con un coeficiente de amortiguamiento C . El sistema dinámico completo puede verse en la figura 4.

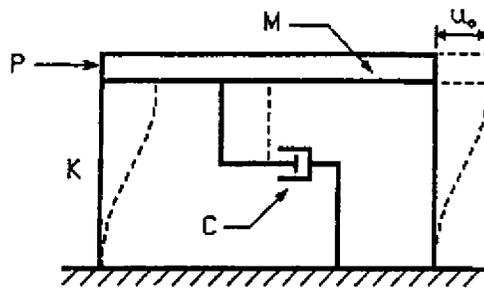


Fig. 4. Sistema de un grado de libertad con amortiguamiento.

Veamos ahora cada uno de los componentes del sistema de un grado de libertad amortiguado. La masa es directamente proporcional al peso. Usando la segunda ley de Newton puede verse que la masa está dada por:

$$M = \frac{W}{g} \quad (1)$$

donde W es el peso del techo y g es la aceleración de la gravedad (9.81 m/s^2).

La rigidez lateral del sistema está dada por el cociente de la fuerza lateral aplicada entre el desplazamiento producido por ésta, esto es:

$$K = \frac{P}{u_0} \quad (2)$$

Se dice que el sistema de un grado de libertad es *lineal* cuando la rigidez permanece constante, o sea que el desplazamiento lateral siempre es directamente proporcional a la fuerza lateral. Así pues, si el sistema tiene un desplazamiento lateral u_0 cuando se le aplica una carga estática P , entonces si se le aplica una carga estática de $2P$ el desplazamiento lateral es $2u_0$ (ver figura 5).

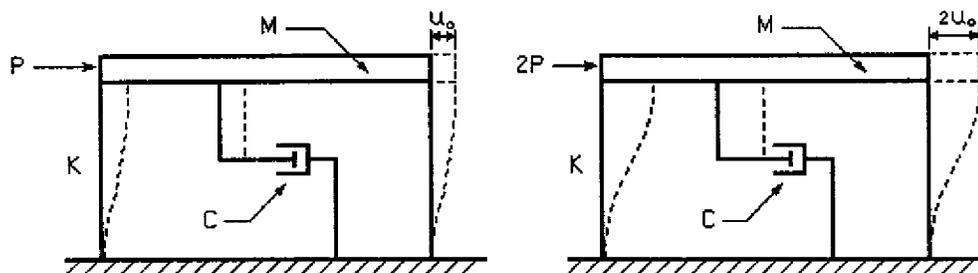


Fig. 5. Desplazamientos laterales proporcionales a las cargas laterales.

Como puede verse en la figura 6, gráficamente la rigidez lateral del sistema es la pendiente en una gráfica de fuerza lateral contra desplazamiento lateral. En el amortiguador viscoso se producen fuerzas laterales que son directamente proporcionales a la velocidad relativa de la masa con respecto a la velocidad del terreno, en este caso la pendiente corresponde al coeficiente de amortiguamiento.

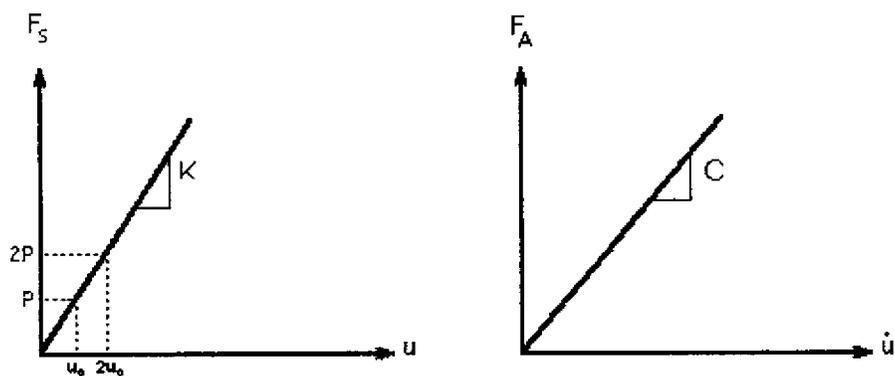


Fig. 6. Representación gráfica de la rigidez lateral y el coeficiente de amortiguamiento.

Como se ilustra en la figura 7 la duración del movimiento en vibración libre es función del grado de amortiguamiento que tenga el sistema. Entre más grande sea el amortiguamiento la duración será menor.

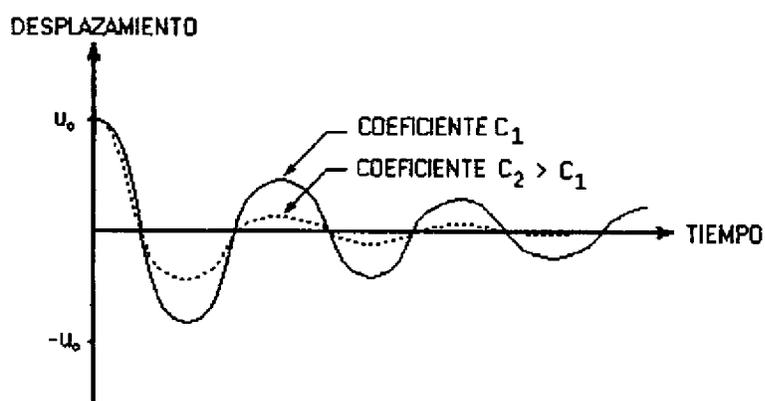


Figura 7. Influencia del amortiguamiento en la vibración libre.

ECUACION DEL MOVIMIENTO.

El movimiento de la estructura idealizada de un piso (sistema de un grado de libertad) cuando es sometido a cargas dinámicas se rige por una ecuación diferencial. Esta ecuación diferencial, conocida con el nombre de *ecuación del movimiento* es función de los siguientes tipos de cargas dinámicas: cargas externas y movimientos sísmicos.

BAJO CARGAS EXTERNAS: Cuando al sistema de un grado de libertad se le aplica una carga externa dinámica $P(t)$, la masa sufre un desplazamiento $u(t)$ el cual también representa la deformación que sufre la estructura (el desplazamiento de la masa con respecto al suelo). Como la fuerza externa varía con el tiempo, el desplazamiento también varía con el tiempo.

A raíz de la aplicación de la fuerza y el movimiento que se produce en su masa, las fuerzas que actúan en esta masa son las siguientes (ver figura 8): la fuerza externa $P(t)$, la fuerza elástica resistente F_E que es la fuerza que las columnas ejercen sobre la masa cuando ésta se mueve, la fuerza de amortiguamiento F_A que es la fuerza que ejerce el amortiguador sobre la masa, y la fuerza de inercia F_I . En todo instante (en cada fracción de segundo), existe un equilibrio dinámico de estas fuerzas. Esta condición de equilibrio está dado por:

$$F_I + F_A + F_E = P(t) \quad (3)$$

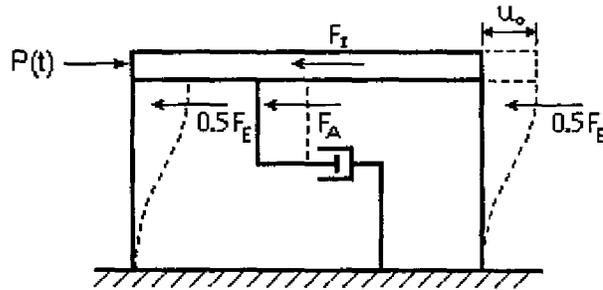


Fig. 8. Diagrama de fuerzas que actúan bajo una carga externa.

Las fuerzas de inercia, de amortiguamiento y elásticas son función del movimiento de la masa, o sea son función de la aceleración, de la velocidad y del desplazamiento de la masa, respectivamente. De acuerdo a la segunda ley de Newton, la fuerza de inercia es directamente proporcional a la masa y a la aceleración total de la misma. Esta fuerza está dada por:

$$F_I = M \ddot{u}(t) \quad (4)$$

donde M es la masa del sistema y $\ddot{u}(t)$ es la aceleración total. La fuerza de amortiguamiento está dada por :

$$F_A = c \dot{u}(t) \quad (5)$$

donde C es el coeficiente de amortiguamiento y $\dot{u}(t)$ es la velocidad relativa de la masa con respecto al suelo. Para un sistema lineal la fuerza elástica resistente está dada por:

$$F_E = Ku(t) \quad (6)$$

donde K es la rigidez lateral del sistema y $u(t)$ es el desplazamiento relativo entre la masa y el suelo. Substituyendo F_I , F_A y F_E en la ecuación de equilibrio dinámico (ecuación 3) se tiene:

$$M\ddot{u}_t(t) + C\dot{u}(t) + Ku = P(t) \quad (7)$$

Esta es la ecuación del movimiento del sistema de un grado de libertad amortiguado con la cual se puede calcular el desplazamiento de la masa cuando se le aplica una carga externa $P(t)$.

BAJO EXCITACION SISMICA En el caso de un sismo no existe una fuerza externa que está aplicada a la masa del sistema, sino que la única sollicitación al sistema es debida al movimiento del terreno sobre el cual se desplanta la estructura. Como resultado de esta excitación la base de la estructura tiene un movimiento igual al del terreno $u_g(t)$ y a su vez la estructura se deforma (desplazamiento del techo con respecto a la base) una cantidad $u(t)$ (ver figura 9). Así pues, el desplazamiento total del techo $u_t(t)$ durante un sismo es igual a:

$$u_t(t) = u(t) + u_g(t) \quad (8)$$

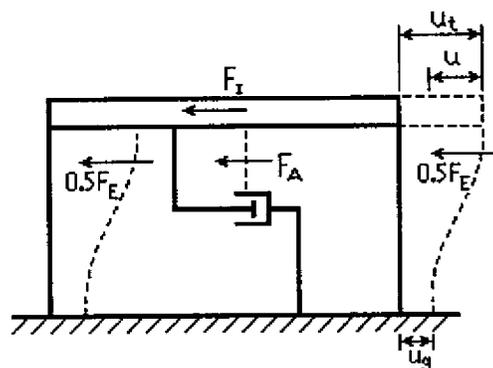


Fig. 9. Estructura de un piso bajo sollicitación sísmica.

El equilibrio dinámico en este caso está dado por:

$$F_I + F_A + F_E = 0 \quad (9)$$

Substituyendo las ecuaciones 4, 5 y 6 en la ecuación 9 se tiene

$$M\ddot{u}_r(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = 0 \quad (10)$$

En este caso la fuerza de inercia puede escribirse como

$$F_I = M[\ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t)] \quad (11)$$

expresión que cuando se sustituye en la ecuación del equilibrio dinámico (ecuación 10) resulta en:

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = -M\ddot{u}_g(t) \quad (12)$$

Esta es la ecuación del movimiento que gobierna la respuesta de un sistema de un grado de libertad amortiguado sujeta a un movimiento de terreno.

CARACTERÍSTICAS ESTRUCTURALES QUE AFECTAN LA RESPUESTA SISMICA

Las principales características estructurales que afectan la respuesta de un edificio sometido a cargas sísmicas moderadas (aquellas en las que el comportamiento es elástico y no se presenta daño alguno en la estructura) son:

- (a) El periodo fundamental de vibración
- (b) El amortiguamiento

El periodo fundamental de vibración de una estructura T es el tiempo que la estructura toma para completar un ciclo completo de vibración.

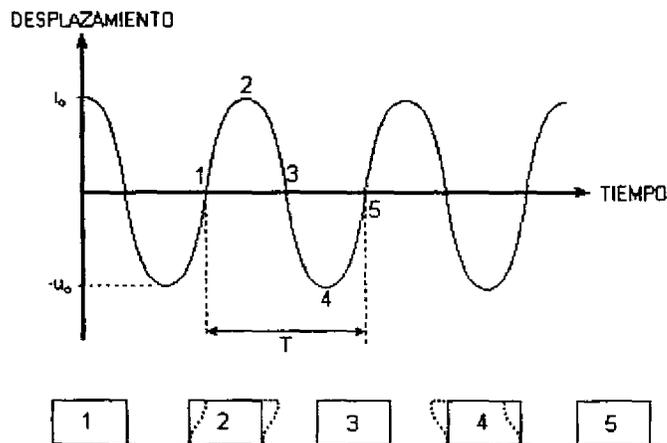


Fig 10. Periodo de vibración de un sistema de un grado de libertad

Sigamos un ciclo de vibración de la estructura usando la figura 10. En la posición 1 la masa está en su posición de equilibrio (el desplazamiento es nulo), de ahí se mueve hacia la derecha hasta que llega al máximo desplazamiento

en la posición 2. A partir de este punto el desplazamiento disminuye y regresa a su posición de equilibrio en la posición 3, continúa moviéndose hacia la izquierda hasta alcanzar el máximo desplazamiento de ese lado en la posición 4. Después de este punto la masa comienza de nuevo a desplazarse hacia la derecha hasta alcanzar nuevamente la posición de equilibrio en la posición 5. Así pues un ciclo completo de movimiento está dado por las posiciones 1-2-3-4-5. En la posición 5 el estado del sistema (desplazamiento y velocidad) son los mismos a la posición 1, en la cual la estructura está lista para iniciar un nuevo ciclo.

Matemáticamente el periodo natural de vibración de un sistema no amortiguado está dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (13)$$

donde es la frecuencia circular de vibración que está dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{Kg}{W}} \quad (14)$$

Así mismo la frecuencia natural de vibración es el número de ciclos por unidad de tiempo. Matemáticamente está dada por:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (15)$$

En el caso de sistemas amortiguados, el periodo de vibración está dado por:

$$T_A = \frac{2\pi}{\omega_A} \quad (16)$$

donde T_A y ω_A son el periodo amortiguado de vibración y la frecuencia circular amortiguada de vibración, respectivamente. La frecuencia circular amortiguada de vibración ω_A puede expresarse en función de la frecuencia circular de vibración por medio de la siguiente expresión:

$$\omega_A = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad (17)$$

donde ξ es la fracción del amortiguamiento crítico y está dado por:

$$\xi = \frac{C}{2M\omega} \quad (18)$$

El denominador de la ecuación 18 se le conoce como amortiguamiento crítico C_c y es el mínimo amortiguamiento necesario para eliminar la vibración (movimiento en dos direcciones) cuando se desplaza la estructura de su posición

de equilibrio y se le libera repentinamente. En la figura 11a puede verse como una estructura con el amortiguamiento no vibra (sólo se mueve de la posición inicial a la posición de equilibrio), mientras que estructuras con amortiguamientos menores al crítico tienen un desplazamiento hacia ambos lados de la posición de equilibrio.

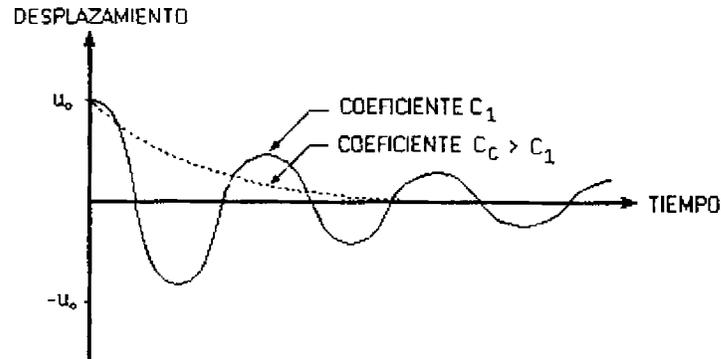


Fig. 11a. Vibración libre para diferentes niveles de amortiguamiento.

De la ecuación 17 puede verse que el amortiguamiento tiende a disminuir la frecuencia circular de vibración del sistema y por lo tanto de alargar el periodo de vibración. Sin embargo en la mayoría de las estructuras la fracción del amortiguamiento crítico está entre 2 y 10%, por lo que de acuerdo a la ecuación 17 el periodo amortiguado es entre 1.0002 y 1.0050 del periodo natural o no amortiguado. Así pues para la mayoría de las estructuras el periodo amortiguado es prácticamente igual al periodo no amortiguado.

Combinando la ecuaciones 13 y 14 se tiene:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{W}{Kg}} \quad (19)$$

De la ecuación 19 puede verse que para dos estructuras con la misma rigidez lateral, entre más grande sea su masa (o el peso), mayor será su periodo natural de vibración (y menor su frecuencia natural de vibración). Para dos estructuras con la misma masa (el mismo peso), entre más grande es su rigidez lateral menor es su periodo natural de vibración (y mayor su frecuencia natural de vibración). De ahí que a las estructuras de periodo corto en ocasiones se les califica como estructuras de mayor rigidez y a las estructuras de periodo largo se les califica como estructuras flexibles.

RESPUESTA A FUERZAS ARMONICAS

Si al sistema de un grado de libertad se le aplicara una fuerza estática $P = A$, o sea una fuerza cuya amplitud se mantuviera constante y con una amplitud igual a A , entonces el desplazamiento sería también constante y tendría un valor de $P = A$ entre la rigidez lateral del sistema K , esto es:

$$U_{estático} = \frac{P}{K} = \frac{A}{K} \quad (20)$$

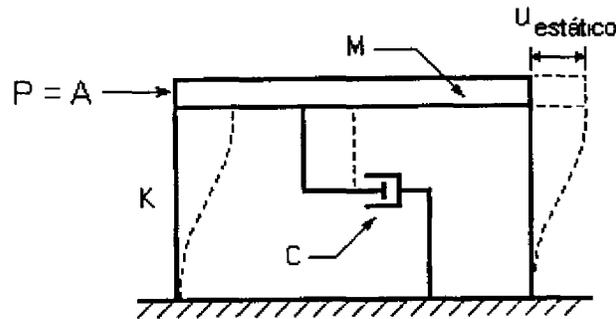


Fig. 11b. Desplazamiento lateral bajo una carga estática.

Así pues, puede verse que en el caso de cargas estáticas el desplazamiento del sistema es independiente de la masa de la estructura, o sea que no importa si la masa es grande o pequeña el desplazamiento siempre será el mismo.

En el caso de cargas dinámicas la respuesta (el desplazamiento producido por la fuerza dinámica) no sólo será función de la rigidez lateral del sistema, sino que además depende de: (1) el periodo de vibración del sistema, o sea depende del cociente de su rigidez lateral entre su masa; (2) el coeficiente de amortiguamiento del sistema \$c\$; y (3) el contenido de frecuencias de la fuerza dinámica, o sea que tan rápido o lenta es la variación de la amplitud de la fuerza con el tiempo.

Una de las fuerzas dinámicas más simples es una carga armónica, o sea aquella cuya amplitud cambia de igual manera a la de variación de la amplitud de una senoide, esto es:

$$P(t) = A \text{ sen}(\bar{\omega} t) \quad (21)$$

donde \$A\$ es la amplitud de la fuerza y \$\bar{\omega}\$ es la frecuencia de la excitación. Gráficamente esta fuerza puede verse en la figura 11c.

En este caso el desplazamiento lateral también varía con el tiempo, y se representa como \$u(t)\$ (ver figura 11d). Una vez pasada una fase inicial de transición (al poco tiempo de aplicada la fuerza), este desplazamiento será también de tipo armónico con una amplitud \$u(t)\$ que varía con el tiempo y cuya amplitud máxima será \$u_{max}\$.

La respuesta máxima del sistema al ser sometido a una fuerza armónica de amplitud \$A\$ puede ser mayor, menor o semejante a la producida por la carga estática de igual amplitud, dependiendo básicamente de dos aspectos:

- (1) El cociente de la frecuencia de excitación (el número de ciclos de carga por unidad de tiempo), entre la frecuencia natural del sistema.
- (2) El amortiguamiento del sistema

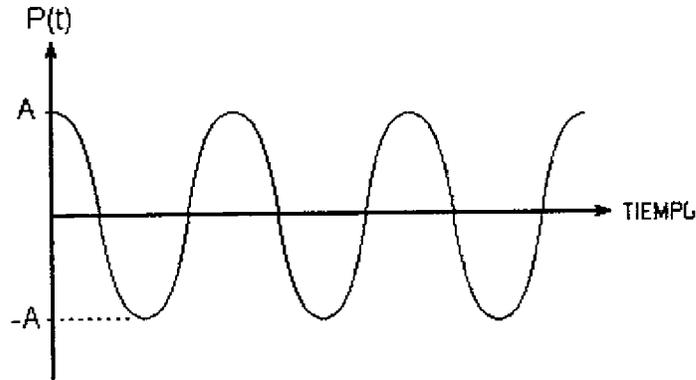


Fig. 11c. Fuerza dinámica de tipo armónico.

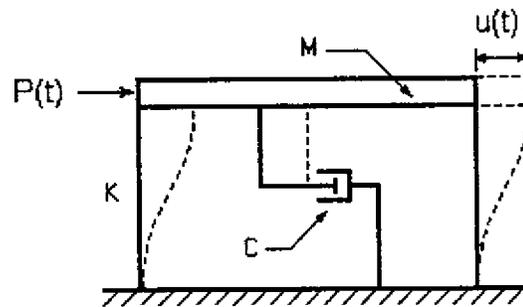


Fig. 11d. Sistema dinámico sometido a una fuerza lateral dinámica de tipo armónico.

Se conoce como *factor de amplificación dinámica* al cociente del desplazamiento máximo bajo cargas dinámicas, entre el desplazamiento estático. Matemáticamente, el factor de amplificación dinámica, FAD, está dado por:

$$D = \frac{U_{\text{dinámico}}}{U_{\text{estático}}} = \frac{U_{\text{max.}}}{U_{\text{estático}}} \quad (22)$$

Cuando FAD es mayor a uno, se tiene una *amplificación dinámica*, esto es, el desplazamiento máximo dinámico es mayor al desplazamiento estático. Así mismo cuando FAD es menor a uno existe una *deamplificación*, esto es la respuesta dinámica es menor a la respuesta estática. Finalmente cuando FAD es igual a uno, el desplazamiento dinámico es igual al estático.

La figura 12, muestra la variación del factor de amplificación FAD, para diferentes valores del cociente de la frecuencia de excitación y la frecuencia del sistema, así como para cinco diferentes valores de amortiguamiento.

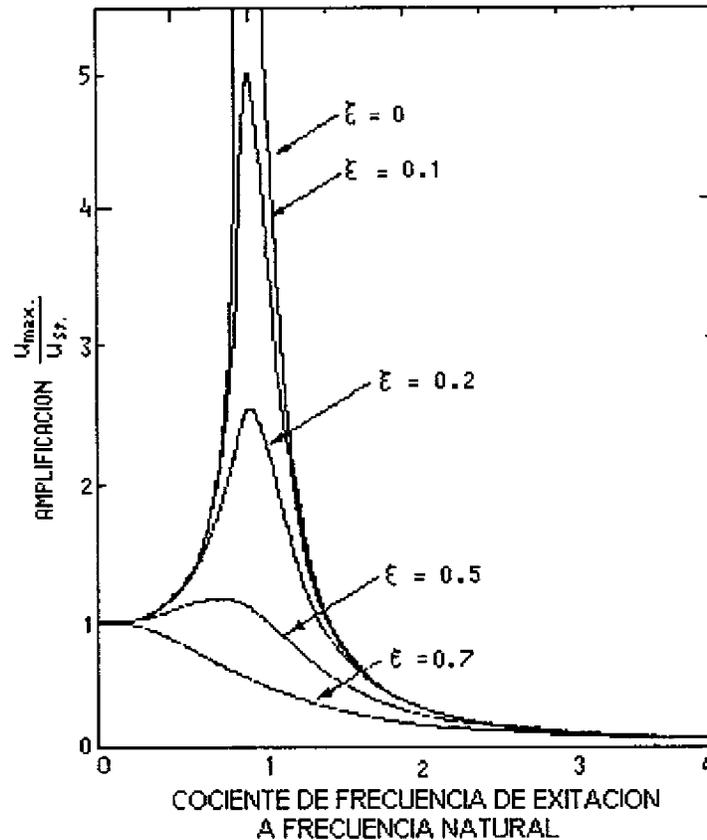


Fig. 12 Amplificación dinámica debida a una excitación dinámica armónica.

Puede verse que cuando la frecuencia de la excitación es mucho menor a la frecuencia natural (cocientes mucho menores a 1) , o sea que la fuerza es mucho más "lenta" en comparación con la velocidad con la que se mueve la estructura en vibración libre, el desplazamiento dinámico es igual al desplazamiento estático. Por lo contrario, cuando la frecuencia de excitación es mucho mayor a la frecuencia natural del sistema (aproximadamente para cocientes mayores a 1.5), o sea cuando la variación de la fuerza es mucho más rápida que la velocidad con la que completa un ciclo la estructura en vibración libre, el desplazamiento dinámico es menor al estático, y se tiene una deamplificación.

Cuando se tienen fracciones de amortiguamiento menores a 0.5, que es el caso de la mayoría de las estructuras, y la frecuencia de la excitación es semejante a la frecuencia natural (abscisas cercanas a 1), se tiene que el desplazamiento dinámico es mayor y en algunos casos mucho mayor al desplazamiento estático.

Se dice que existe *RESONANCIA* cuando la frecuencia de excitación coincide con la frecuencia natural del sistema y se obtiene la amplificación dinámica máxima. El valor de la amplificación máxima es muy sensible al nivel de amortiguamiento. Entre más pequeño es el amortiguamiento mayor será la amplificación. El valor de la amplificación máxima está dado por:

$$FAD_{max} = \frac{1}{2\xi} \tag{23}$$

Por ejemplo si α es igual a 0.10 (10% del amortiguamiento crítico), el factor de amplificación dinámico máximo es igual a $1/0.2 = 5$ (ver figura 12). Análogamente, si α es igual a 0.2, entonces el factor de amplificación dinámico máximo es $1/0.4 = 2.5$.

Como ya se mencionó, los edificios por lo general tienen amortiguamientos menores al 0.08, por lo que es importante el evitar frecuencias de excitación semejantes a las frecuencias naturales, para poder evitar amplificaciones dinámicas importantes.

Como se verá más adelante, las amplificaciones máximas que se dan bajo un sismo son menores a las que ocurren bajo fuerzas armónicas debido a que un movimiento sísmico está compuesto por muchas frecuencias y no solo una como es el caso de una fuerza armónica. Un movimiento sísmico puede descomponerse como la superposición de una familia de movimientos armónicos con diferentes amplitudes, frecuencias y fases. Es la combinación de estos factores junto con algunos otros, lo que determinan que tan severa puede ser la respuesta de un edificio a un sismo dado. De ahí que es importante conocer *el contenido de frecuencias* del movimiento sísmico y compararlo con la frecuencia natural de vibración del edificio.

RESPUESTA A MOVIMIENTOS SISMICOS

Con fines de ingeniería sismo-resistente, los movimientos de terreno durante un temblor se miden por medio de un acelerógrafo, el cual mide la historia de aceleraciones del terreno. Como la aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, es posible obtener la historia de velocidades del terreno a partir de las aceleraciones de terreno por medio de una integración en el tiempo. Análogamente, como la velocidad es la derivada del desplazamiento con respecto al tiempo, es posible obtener la historia de desplazamientos del terreno a partir de una integración en el tiempo de la historia de velocidades o una doble integración de la historia de aceleraciones.

Un ejemplo de historia de aceleraciones, velocidades y desplazamientos del terreno medidos en el sótano de un edificio de Los Angeles durante el temblor de San Fernando de 1971 en el estado de California puede verse en la figura 13.

Sismo de San Fernando Feb 9, 1971 - 0600 PST
15910 Ventura BLVD., Sótano. Los Angeles, Cal. COMP S81E
Valores pico; Aceleración = 140.2 cm/s/s Velocidad = -16.1 cm/s Despl = -7.1 cm

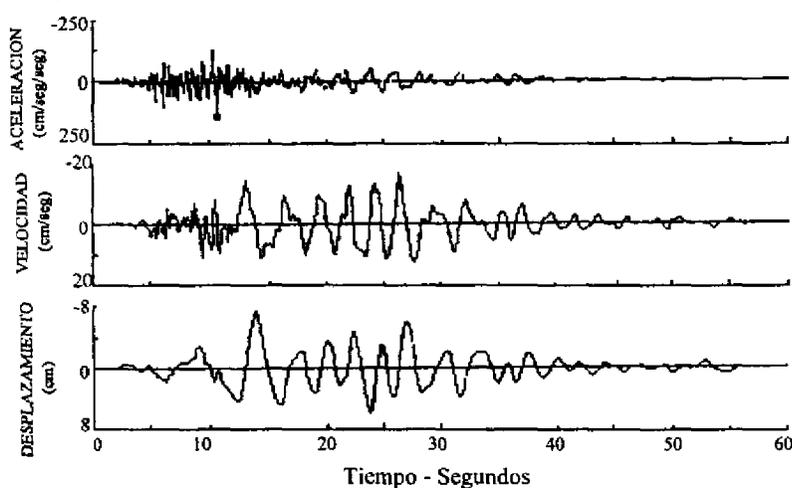


Fig. 13. Ejemplo de historia de aceleraciones, velocidades y desplazamientos de terreno.

La respuesta de un sistema de un grado de libertad a un movimiento de terreno como el que se muestra en la figura 13, se puede obtener a partir de la ecuación (12) utilizando diferentes métodos:

- (1) En el dominio del tiempo por medio de la solución de la integral de Duhamel
- (2) En el dominio del tiempo por medio de una integración numérica de la ecuación del movimiento
- (3) En el dominio de la frecuencia obteniendo la transformada de Fourier de la historia de aceleraciones, multiplicándola por la función de transferencia del sistema y obteniendo la transformada inversa de Fourier de dicho producto.

Una explicación detallada de estos métodos está fuera del alcance de este curso.

Una vez obtenida la historia de desplazamientos del sistema $u(t)$, la historia de cortantes en la base $V(t)$, o la historia de momentos de volteo $M(t)$ producidos por el sismo en la estructura pueden determinarse de la siguiente manera:

$$V(t) = F_E(t) = K \cdot u(t) \quad (24)$$

$$M(t) = h \cdot V(t) = h \cdot Ku(t) \quad (25)$$

donde h es la altura de la estructura.

ESPECTRO DE RESPUESTA SISMICA

Para fines de diseño sismo-resistente lo que normalmente nos interesa es conocer únicamente la respuesta máxima. Por ejemplo, nos interesa conocer el desplazamiento lateral máximo, o el cortante basal máximo, o el momento de volteo máximo, etc.

Una de las herramientas más útiles para evaluar la severidad de la respuesta máxima de una estructura a un sismo dado es el *ESPECTRO DE RESPUESTA*. Un espectro de respuesta es la representación gráfica de la respuesta máxima en función del periodo natural de vibración del sistema. Esto es, el espectro de respuesta nos da información de la *respuesta máxima* para toda una familia de sistemas de un grado de libertad.

La forma en la que se calcula un espectro de respuesta se ilustra en la figura 14 para el caso de un espectro de desplazamientos. En este caso, para cada periodo se calcula la historia de desplazamientos y sólo se selecciona la máxima respuesta, que es la que se grafica para el período natural de vibración correspondiente. En el caso de la figura 14, se muestra el espectro de desplazamientos para el acelerograma medido en el temblor de El Centro, California el 18 de mayo de 1940. En el primer ejemplo, se tiene un sistema de un grado de libertad con un periodo natural de vibración igual a 0.5 segundos y con un 2% del amortiguamiento crítico. Se calcula toda la historia de desplazamientos y se selecciona el máximo, que en este caso es 2.48 pulgadas (6.3 cm.), así pues la abscisa $T = 0.5$ segundos y $S_d = 2.48$ pulgadas forman las coordenadas de un punto en el espectro de respuesta. En el segundo ejemplo se tiene un sistema de un grado de libertad con un periodo natural de vibración igual a 1 segundo; se calcula toda su historia de desplazamientos cuando al sistema se le somete al acelerograma y se obtiene su respuesta máxima como 6.61 pulgadas (16.8 cm.). Si este proceso se repite para toda una familia de sistemas de un grado de libertad con diferentes periodos de vibración y todos con el mismo amortiguamiento, se obtiene el espectro de respuesta.

Una vez calculado el espectro de respuesta puede saberse de manera inmediata el desplazamiento aproximado que tendría una estructura al ser sometida a dicho movimiento de terreno. El espectro de respuesta permite también

evaluar la magnitud del desplazamiento máximo de una estructura con un cierto periodo, en comparación con el desplazamiento máximo de alguna otra estructura sometida al mismo movimiento de terreno. Por ejemplo, si se tiene una estructura con un periodo de vibración de 1.0 segundos y otra con un periodo de 1.5 segundos, con el espectro de respuesta de la figura 14 vemos que si ambas estructuras se sometieran al mismo movimiento de terreno, la estructura con periodo de 1 segundo estaría sometida a un desplazamiento mayor que el de la otra estructura, a pesar de que ambas tengan *el mismo* movimiento en su base.

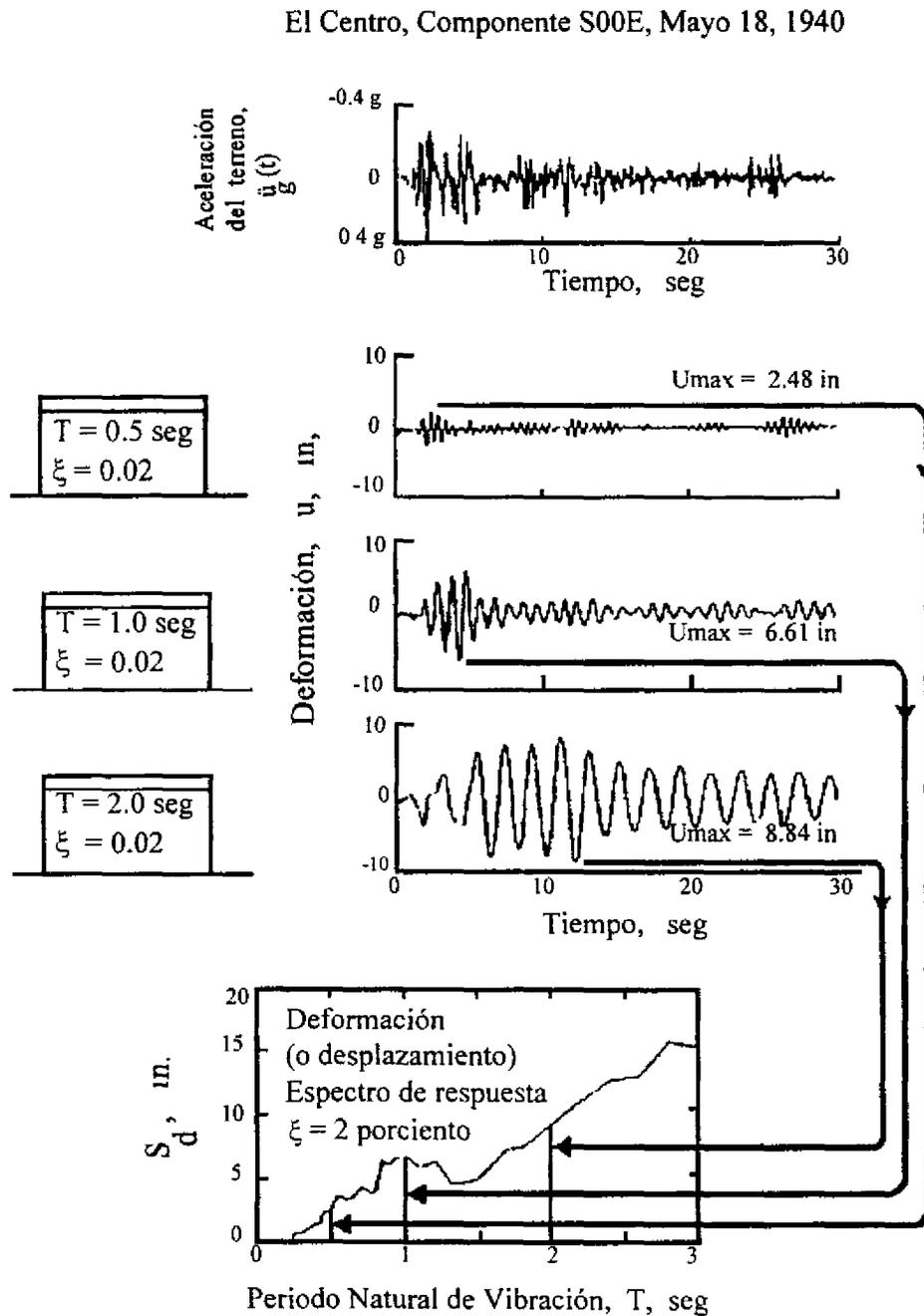


Fig. 14 Construcción de un espectro de respuesta.

De igual manera que se puede calcular la historia de desplazamientos, se puede calcular la historia de aceleraciones. De modo que para cada sistema de un grado de libertad se puede calcular la historia de aceleraciones y de ahí seleccionar la aceleración máxima para poder así graficar el *espectro de aceleraciones*. La figura 15 muestra ejemplifica el cálculo de tres puntos del espectro de respuesta. Por ejemplo para el caso de un sistema de un grado de libertad con un periodo natural de vibración de 0.3 segundos, o sea una estructura que toma 0.3 segundos en completar un ciclo de vibración, y con un amortiguamiento del 5%, cuando es sometido a la historia de aceleraciones del temblor de El Centro California, tiene una aceleración máxima de 0.75 veces la aceleración de la gravedad. Así pues la pareja de coordenadas constituida por la abscisa $T = 0.3$ segundos y la ordenada 0.75 g son un punto en el espectro de respuesta de aceleraciones. Si se repite el mismo proceso para sistemas de un grado de libertad con periodos naturales de vibración de 0.5 segundos y 1.0 segundos se obtienen aceleraciones máximas de 1.02 g y 0.48 g, respectivamente. Si esto se repite para toda una familia de sistemas dinámicos de un grado de libertad con periodos entre 0 y 2 segundos, se obtiene el espectro de aceleraciones mostrado en la parte inferior de la figura 15.

De igual manera se puede obtener la historia de velocidades de cada sistema, para seleccionar la máxima velocidad y poder así construir el espectro de respuesta de velocidades. Si no se quiere calcular toda la historia de velocidades y aceleraciones para cada periodo, los espectros de velocidades y aceleraciones pueden calcularse en forma aproximada por medio de las siguientes relaciones:

$$S_v = \omega S_d \quad (26)$$

o sustituyendo la ecuación (13) en la ecuación (26), se tiene

$$S_v = \frac{2\pi}{T} S_d \quad (27)$$

Si para cada T se grafica S_v , se tiene un espectro aproximado del espectro de velocidades que se le conoce como *seudo espectro de velocidades*. El *seudo espectro de velocidades* calculado a partir del espectro de desplazamientos mostrado en la figura 14, puede verse en la parte media de la figura 16.

Al igual que en el caso de las velocidades máximas, las aceleraciones máximas también se pueden calcular en forma aproximada a partir de los desplazamientos máximos por medio de la siguiente relación:

$$S_a = \omega^2 \cdot S_d \quad (28)$$

o sustituyendo la ecuación (13) en esta ecuación se tiene

$$s_a = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot S_d \quad (29)$$

La gráfica de T vs. S_a se conoce con el nombre de *espectro de seudo aceleraciones*. Un ejemplo para el mismo movimiento de terreno puede verse en la parte baja de la figura 6. El nombre "seudo" se emplea para distinguirlo del espectro exacto, sin embargo para valores pequeños de amortiguamiento y para periodos de vibración entre 0.2 y 3 segundos, el error que se comete es muy pequeño.

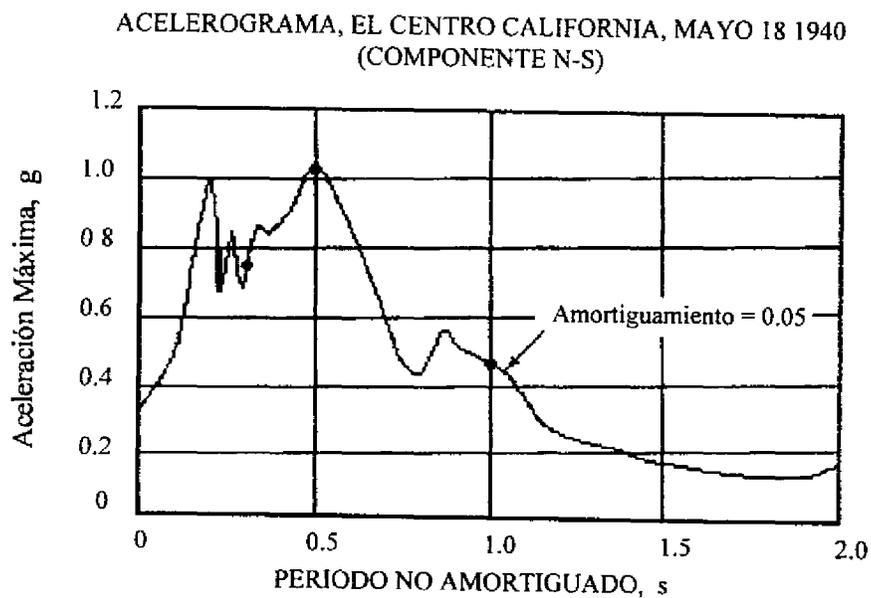
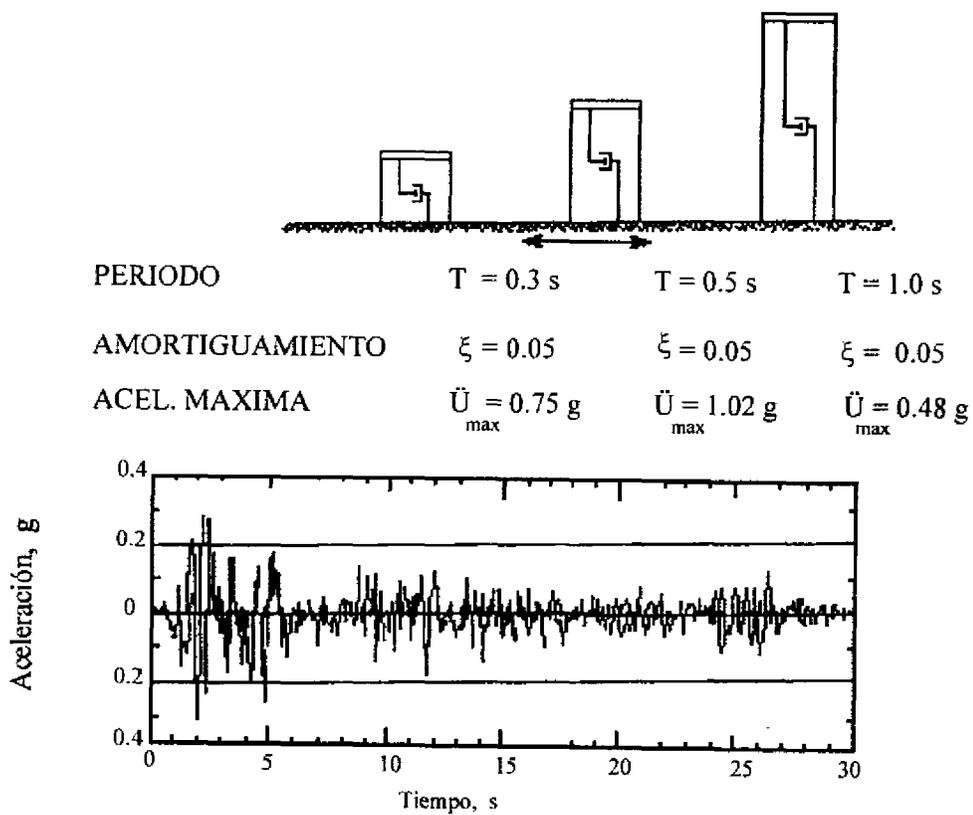


Fig. 15. Construcción de un espectro de aceleraciones.

Así mismo, los espectro de seudo velocidades y de seudo aceleraciones se relacionan por medio de la siguiente expresión:

$$S_a = w \cdot S_v \quad (30)$$

y

$$S_a = \frac{2\pi}{T} S_v \quad (31)$$

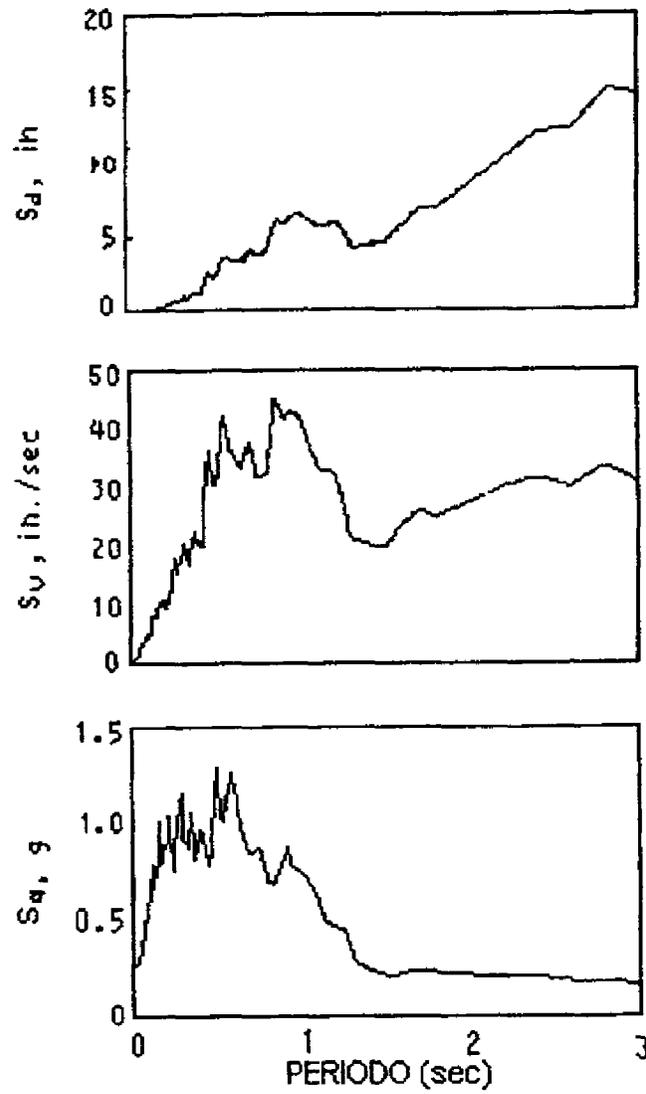


Figura 16. Espectros de desplazamiento, velocidad y aceleración.

Los espectros de respuesta como los mostrados en la figura 16 permiten la estimación inmediata de el desplazamiento, velocidad y aceleración máximas de toda una familia de estructuras sujetas al mismo movimiento de terreno.

A partir del espectro de aceleraciones o el espectro de pseudo aceleraciones es posible obtener al máximo cortante basal de la estructura a partir de la siguiente expresión:

$$V_{\max.} = m \cdot Sa \quad (32)$$

o bien

$$V_{\max.} = \frac{S_a}{g} \cdot W \quad (33)$$

donde W es el peso total de la estructura y g es la aceleración debida a la gravedad. Cuando el máximo cortante se representa como en la ecuación (33), S_a / g representa el llamado coeficiente sísmico el cual forma la base de las cargas sísmicas en el Reglamento de Construcciones del Departamento del Distrito Federal. Así pues si para la zona III del Distrito Federal se diseña con un coeficiente sísmico de 0.4, esto quiere decir que se está diseñando para una aceleración *en la estructura* de el 40% de la aceleración de la gravedad, o sea que las fuerzas laterales para las que se diseñaría dicha estructura serían iguales al cuarenta por ciento de su peso.

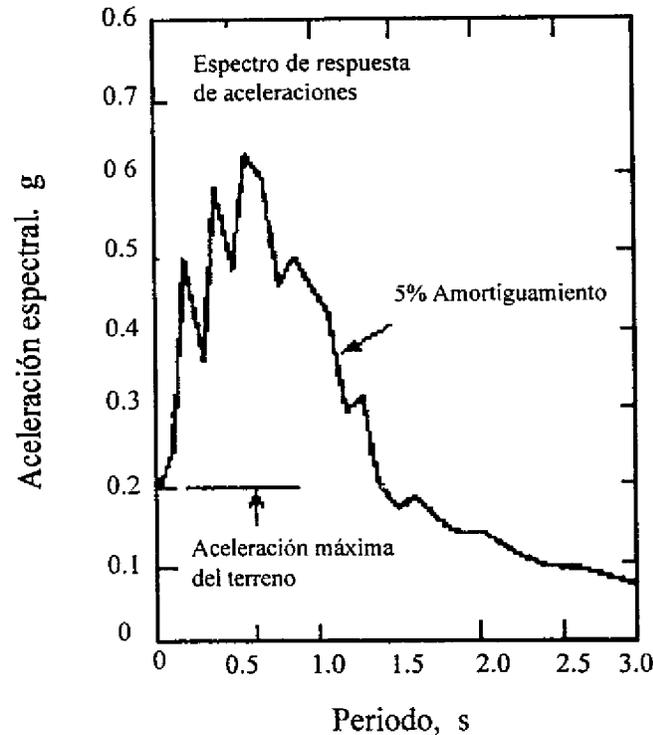


Fig 17. Aceleración máxima del terreno en un espectro de aceleraciones.

Es importante aclarar que la aceleración espectral representa la aceleración en la estructura, la cual puede ser mayor o menor a la máxima aceleración del terreno. En un espectro de respuesta de aceleraciones, la máxima aceleración del terreno está representada como la ordenada del espectro para un periodo igual a 0 (ver figura 17). Dicho periodo corresponde a un sistema infinitamente rígido, de modo que el movimiento que se tiene en la parte superior de la estructura es exactamente igual al de su base, o sea al del terreno. Por ejemplo, para el espectro de aceleraciones mostrado en la figura 17, la aceleración máxima de terreno es igual al 20% de la aceleración de la gravedad. Así mismo, puede verse que estructuras con periodos de vibración menores a 1.45 segundos son sometidos a aceleraciones mayores a las del terreno, o sea, sufren una *amplificación* de aceleraciones, mientras que estructuras con periodos de vibración mayores a 1.45 segundos tienen aceleraciones máximas en la estructura que son menores a la máxima aceleración del terreno.

Como se mencionó anteriormente el espectro de respuesta se construye, calculando la respuesta máxima (aceleración máxima, velocidad máxima o desplazamiento máximo) para una familia de sistemas de un grado de libertad que tienen el mismo amortiguamiento, sin embargo, normalmente este proceso se repite a su vez para diferentes valores de amortiguamiento para obtener un espectro como el que se muestra en la figura 18. En esta figura puede verse la influencia del amortiguamiento en la respuesta de edificios a sismos. Básicamente a mayor amortiguamiento se tiene dos efectos: (1) Disminuyen las ordenadas espectrales, esto es la respuesta es menor; y (2) Se suaviza el espectro, esto es existe una menor variación de ordenadas espectrales para pequeños cambios en el periodo de vibración. Por ejemplo si vemos la figura 18, para dos estructuras con amortiguamiento del 1% y con periodos de 0.48 segundos y 0.51 segundos se tiene un cambio importante en su respuesta máxima (la aceleración máxima de la estructura con periodo igual a 0.48 segundos es mucho mayor a la aceleración máxima de la estructura con periodo de vibración igual a 0.51 segundos), mientras que si esas dos estructuras tuvieran un amortiguamiento del 20% entonces su respuesta máxima sería muy semejante.

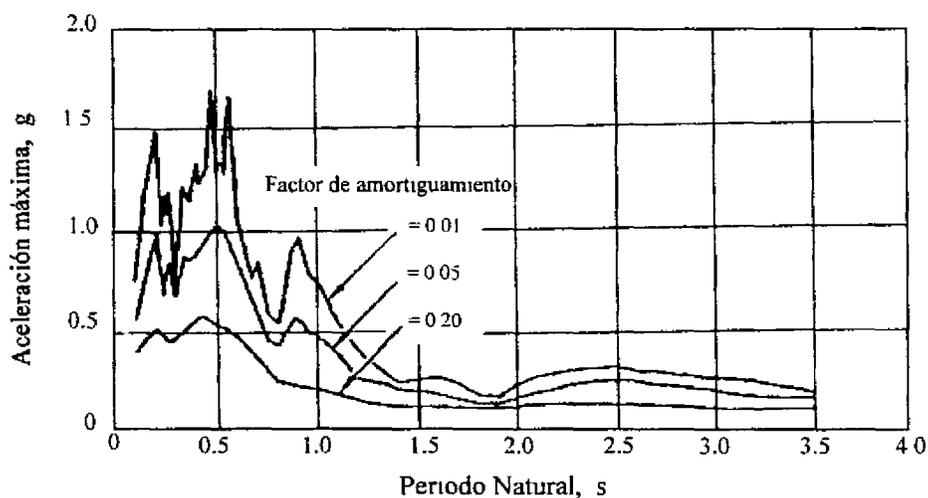


Fig. 18. Influencia del amortiguamiento en el espectro de aceleraciones.

FACTORES QUE AFECTAN LOS MOVIMIENTOS DE TERRENO

Hasta el momento se ha visto los dos factores principales que afectan la respuesta estructural de estructuras con comportamiento lineal, el periodo de vibración y el amortiguamiento, dado un cierto movimiento de terreno. Ahora se verán algunos de los factores que influyen en las características del movimiento de terreno.

Los factores principales que influyen en las características del movimiento de terreno producido por un sismo son:

- (1) *La distancia epicentral* que es la distancia en línea recta desde el epicentro a el sitio donde se encuentra la estructura.
- (2) *La magnitud del sismo.*
- (3) *Las condiciones locales del terreno* donde se encuentra la estructura.

INFLUENCIA DE LA DISTANCIA EPICENTRAL.- Para un mismo sismo en la medida que nos alejamos del epicentro la intensidad del movimiento disminuye en un fenómeno que se conoce con el nombre de *atenuación*. A partir de registros obtenidos a diferentes distancias se han podido establecer relaciones entre la aceleración máxima que se tiene en las inmediaciones al epicentro a las que se tienen a diferentes distancias.

Un ejemplo de este tipo de estudios se muestra en la figura 19 que corresponde a registros obtenidos en el temblor de 1979 en Imperial Valley en California (aproximadamente a 30 km al norte de Mexicali) que tuvo una magnitud de 6.6 en la escala de Richter. Puede verse que mientras que a 1 km del epicentro se midieron aceleraciones entre 0.4 y 0.8 de la aceleración de la gravedad, a 30 km del epicentro las aceleraciones máximas de terreno estuvieron entre 0.07 y 0.15 de la aceleración de la gravedad, y a 100 km las aceleraciones máximas de terreno fueron tan sólo entre 0.01 y 0.04 de la aceleración de la gravedad.

Por medio de muchas mediciones hechas en varios sismos se han podido establecer relaciones entre la distancia epicentral y la aceleración máxima de terreno por medio de estudios estadísticos y regresiones no lineales donde se obtiene una curva que obtenga el mejor ajuste a las observaciones. Este tipo de relaciones que se expresan por medio de una ecuación matemática reciben el nombre de *leyes de atenuación* y nos permiten estimar el nivel de aceleración máxima que se puede tener en un sitio si se conoce la distancia al epicentro.

Es importante mencionar que la velocidad con que se atenúa (i e., la velocidad con la que disminuye) la aceleración máxima del terreno, depende del tipo de roca y formaciones geológicas por las que pasan las ondas sísmicas, de modo que para regiones diferentes se pueden tener atenuaciones diferentes.

Un ejemplo puede verse de esta situación puede verse en la figura 20, donde se comparan las leyes de atenuación para la parte este y la parte oeste de los Estados Unidos. Puede verse que la atenuación es diferente para cada región.

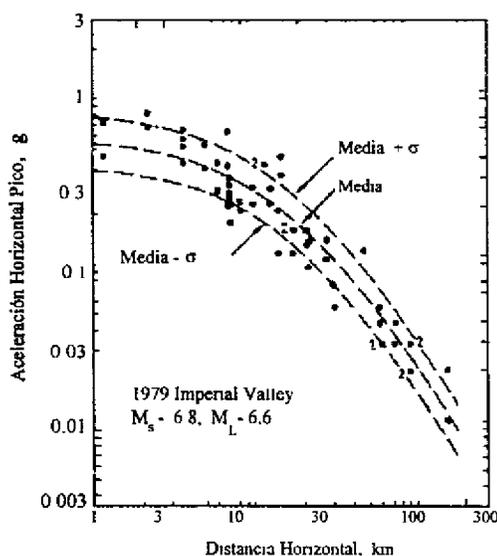


Fig 19. Influencia de la distancia epicentral en la aceleración máxima de terreno.

Por ejemplo en la parte oeste de los Estados Unidos se espera que al estar a 10 km del epicentro se tienen aceleraciones máximas de terreno entre un 45 y 60% de las que se tienen a un kilómetro del epicentro, mientras que para la parte este de Los Estados Unidos a 10 km del epicentro las aceleraciones máximas del terreno son aún del orden del 90% de las que se tienen a 1 km del epicentro. Se dice entonces que la atenuación en la parte oeste de los Estados Unidos es mayor a la que se tiene en la costa este, ya que la aceleración máxima del terreno disminuye más rápidamente con la distancia en la parte oeste que en la parte este

En general es necesario el desarrollar leyes de atenuación para cada región sísmica. En el caso concreto de México se tienen leyes de atenuación que han sido desarrolladas a partir de registros obtenidos únicamente en México. Estas leyes de atenuación son diferentes a las americanas, por lo tanto la aplicación de leyes de atenuación de otra región pueden resultar en resultados o estimaciones erróneas.

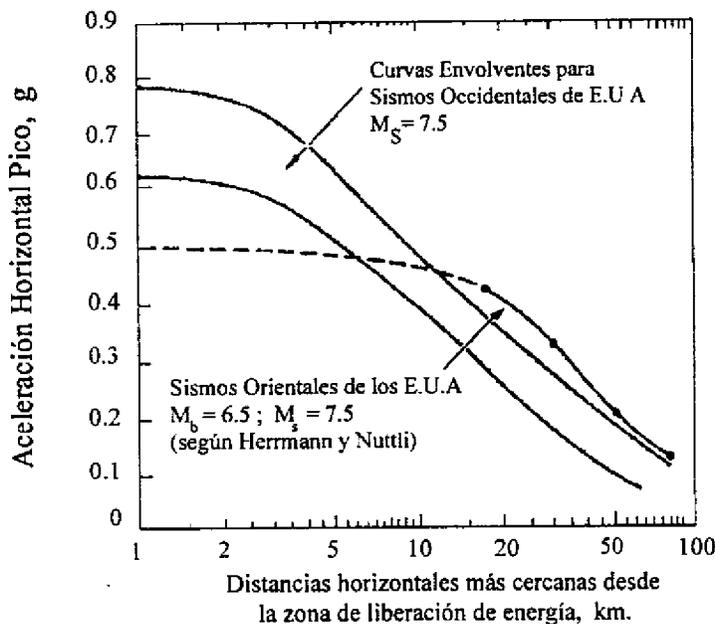


Fig. 20. Ejemplo de atenuaciones diferentes para distintas regiones.

EFFECTO DE LA MAGNITUD DEL SISMO.- En general, entre mayor es la magnitud de un sismo, mayores son las aceleraciones máximas que produce. De modo que para una misma distancia epicentral, digamos 10 km, se espera que la aceleración máxima de terreno sea mayor en un sismo de magnitud 7.5 que la aceleración máxima de terreno en un sismo de magnitud 6.5.

El efecto de la magnitud en las aceleración máxima de terreno por lo general también se incorpora en las leyes de atenuación. La forma en la que se hace esto es el desarrollar leyes de atenuación basadas en sismos de diferentes magnitudes, con lo que se obtienen gráficas como la mostrada en la figura 21, la cual está basada en información registrada en el estado de California en los Estados Unidos.

Puede verse que, por ejemplo, para una distancia epicentral de 20 millas (32 km) la aceleración máxima de terreno en un sismo de magnitud 7.6 es de 28% de la aceleración de la gravedad, mientras que para la misma distancia en un sismo de magnitud 5.6 se tendría una aceleración máxima de terreno de aproximadamente 17% de la aceleración de la gravedad, esto es del 60% de la máxima en un sismo de magnitud 7.6.

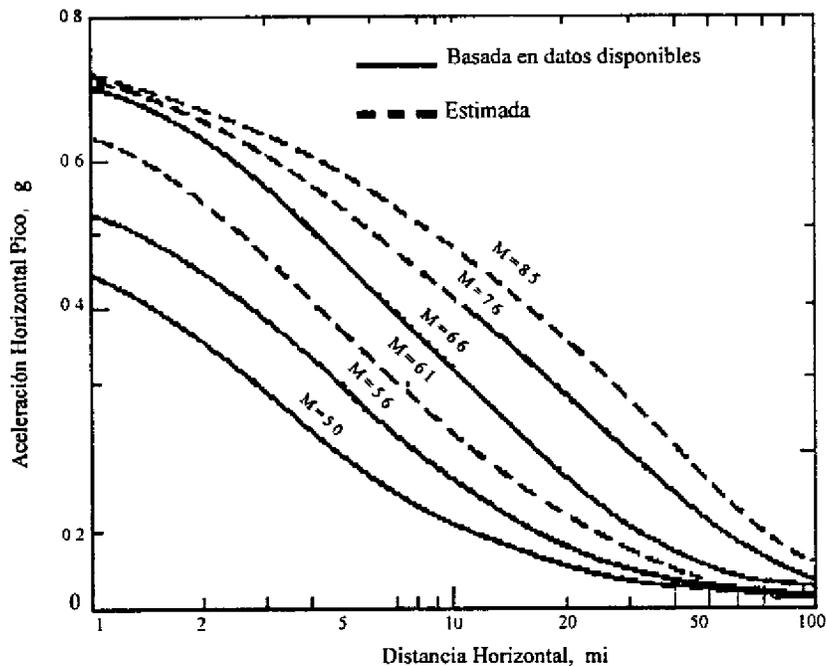


Fig. 21. Influencia de la magnitud y distancia en la aceleración máxima de terreno.

INFLUENCIA DEL TIPO DE TERRENO.- El tipo de terreno tiene básicamente influencia en dos características del movimiento de terreno:

- (1) En la aceleración máxima de terreno
- (2) En el contenido de frecuencia del movimiento.

Para el caso de suelos firmes, se espera que las aceleraciones máximas de terreno sean aproximadamente las mismas para niveles bajos de aceleración y ligeramente más bajas para niveles de aceleración más altos, como puede verse en la figura 22.

En el caso de suelos blandos, el que las aceleraciones máximas de terreno sean más altas o más bajas que las que ocurren en roca depende del nivel de aceleración. La figura 22 muestra que para aceleraciones en roca mayores a 12% de la aceleración de la gravedad, se tiene que las aceleraciones máximas en un suelo blando son menores que las aceleraciones en roca; mientras que para aceleraciones en roca menores a 12% de la aceleración de la gravedad, se espera que las aceleraciones máximas en un suelo blando sean mayores, esto es que el suelo blando *amplifica* el movimiento

Esta situación es sumamente importante en el caso de la Ciudad de México. La figura 22 está desarrollada con datos de suelos arcillosos que no son tan blandos como los de la Ciudad de México. En el caso de la zona lacustre de la zona Metropolitana donde se tienen depósitos de arcilla con altos contenidos de agua y con velocidades de propagación de onda de cortante muy bajas, se tiene que las amplificaciones son mucho mayores. Por ejemplo en el sismo del 19 de septiembre de 1985, las aceleraciones máximas medidas en roca fueron del orden de 5% de la aceleración de la gravedad, mientras que en la zona lacustre se midieron aceleraciones máximas de hasta 20% de la aceleración de la gravedad, esto es una amplificación de cuatro veces con respecto a la zona firme.

El otro aspecto que modifica el tipo de suelo es el contenido de frecuencia. En general los movimientos sobre roca son más ricos en altas frecuencias (entre 2 y 15 Hz), esto es el movimiento de terreno es más rápido. En el caso de suelo blandos como los de la zona lacustre de la Ciudad de México, el movimiento es filtrado en su paso a través

de los depósitos y resulta en un movimiento muy puro en el sentido de que sólo contiene un rango pequeño de frecuencias que es muy bajo, el cual dependiendo de la profundidad de los depósitos puede variar entre 0.8 y 0.2 Hz. El movimiento es muy semejante a una excitación de tipo armónico, de ahí que este tipo de movimientos de terreno resulten tan destructivos.

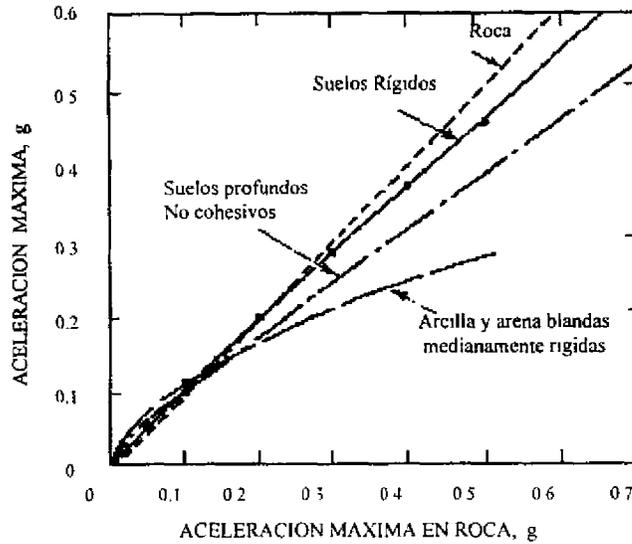


Fig. 22. Influencia del tipo de terreno en la aceleración máxima de terreno.

INTRODUCCION A SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

Si bien el sistema de un grado de libertad conduce a aproximaciones razonables para obtener una estimación del comportamiento global de edificios, existen ocasiones en las que es necesario el recurrir a modelos más sofisticados en los que la masa de la estructura ya no se concentra en un sólo punto, si no que se distribuye en varios puntos a lo alto del edificio. Típicamente, en este tipo de modelos se supone que la masa está concentrada en los niveles de piso, y sujeta a desplazamientos laterales únicamente.

Un ejemplo de este tipo de modelos se muestra en la figura 23, que muestra el modelo dinámico de un edificio de tres pisos, en donde cada piso está representado por un masa, y a su vez cada masa representa un grado de libertad.

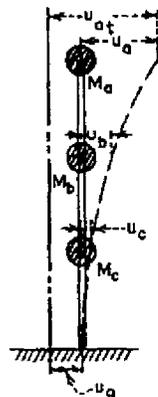


Fig. 23 Sistema idealizado de tres grados de libertad

En este caso las ecuaciones del movimiento están dadas por:

$$F_{Ia} + F_{Aa} + F_{Ea} = -m_a \ddot{u}_g(t) \quad (34)$$

$$F_{Ib} + F_{Ab} + F_{Eb} = -m_b \cdot \ddot{u}_g(t) \quad (35)$$

$$F_{Ic} + F_{Ac} + F_{Ec} = -m_c \cdot \ddot{u}_g(t) \quad (36)$$

donde m_a , m_b y m_c son las masas del tercer, segundo y primer nivel del edificio.

Las ecuaciones (34), (35) y (36) pueden escribirse como:

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = -M[1]\ddot{u}_g(t) \quad (37)$$

donde M , C y K son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema. La respuesta del sistema mostrado en la figura 23, puede calcularse por medio de la resolución del sistema de ecuaciones (35). Cabe hacer notar que la forma de la ecuación (37) para sistemas de varios grados de libertad es idéntica a la ecuación para sistemas de un grado de libertad (ecuación 7).

En el caso de sistemas lineales, la respuesta sísmica total puede calcularse como la superposición de la respuesta de cada modo de vibrar. Un modo de vibrar es un vector que en cada elemento tiene las amplitudes nodales *relativas*. La figura 24 muestra los tres modos de vibrar del edificio de tres pisos. Cada modo de vibrar tiene su propio "ritmo", y siempre se tiene que el segundo modo de vibrar tiene un menor periodo (mayor frecuencia) que el primer modo, y a su vez el tercer modo tiene un periodo menor) mayor frecuencia que el segundo modo.

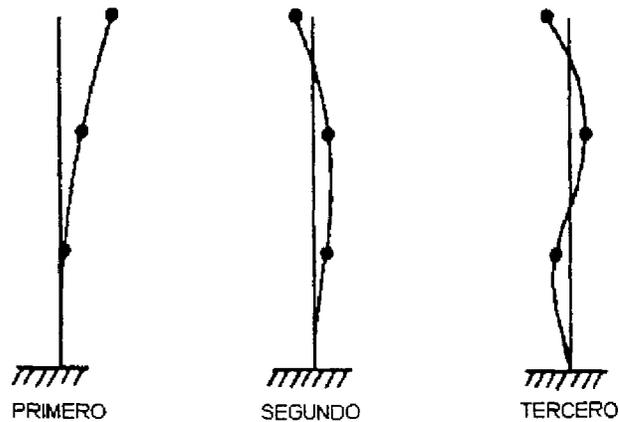
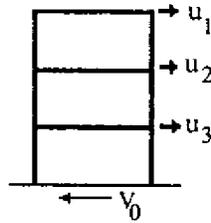


Fig. 24. Modos de vibrar del sistema de tres grados de libertad.

Si se calcula la respuesta de cada modo, resolviendo la ecuación del movimiento para cada grado de libertad, puede calcularse la respuesta total como la superposición de la respuesta de cada modo. Un ejemplo de esta situación se muestra en la figuras 25 y 26, donde se muestra la historia de desplazamientos del tercer piso de un edificio de 3 pisos al ser sometido al registro de El Centro y la historia de cortantes basales. Es importante mencionar que el máximo de la respuesta de cada modo no necesariamente ocurre en el mismo instante. Así mismo puede verse que en el caso de los desplazamientos la respuesta total está dominada por el primer modo, esto es, es el primer modo el que contribuye a la mayor parte de la respuesta total.



Edificio idealizado de tres niveles

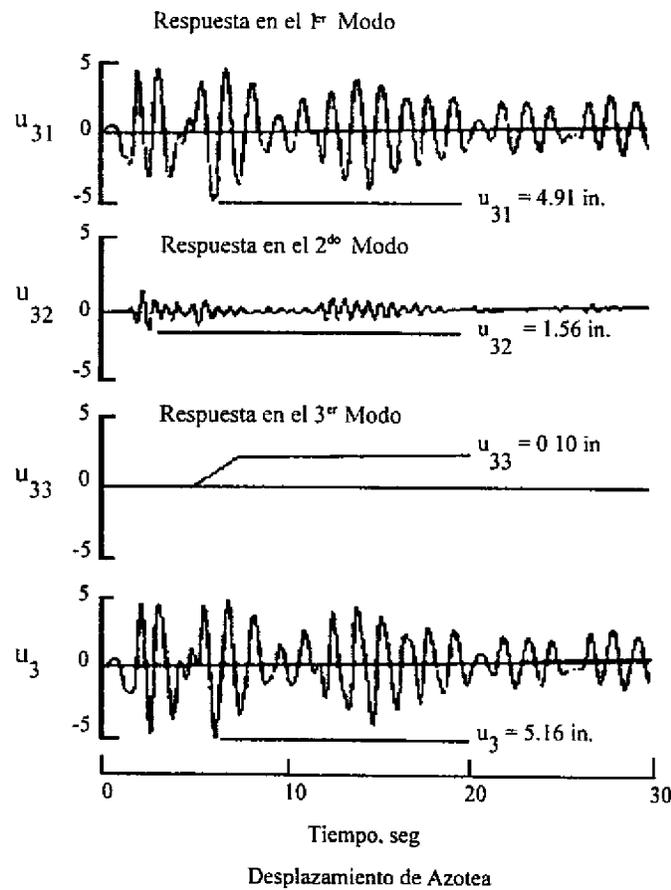


Fig. 25. Descomposición modal de la historia de desplazamientos en el último nivel.



Sismo de El Centro - Componente S00E, Mayo18, 1940

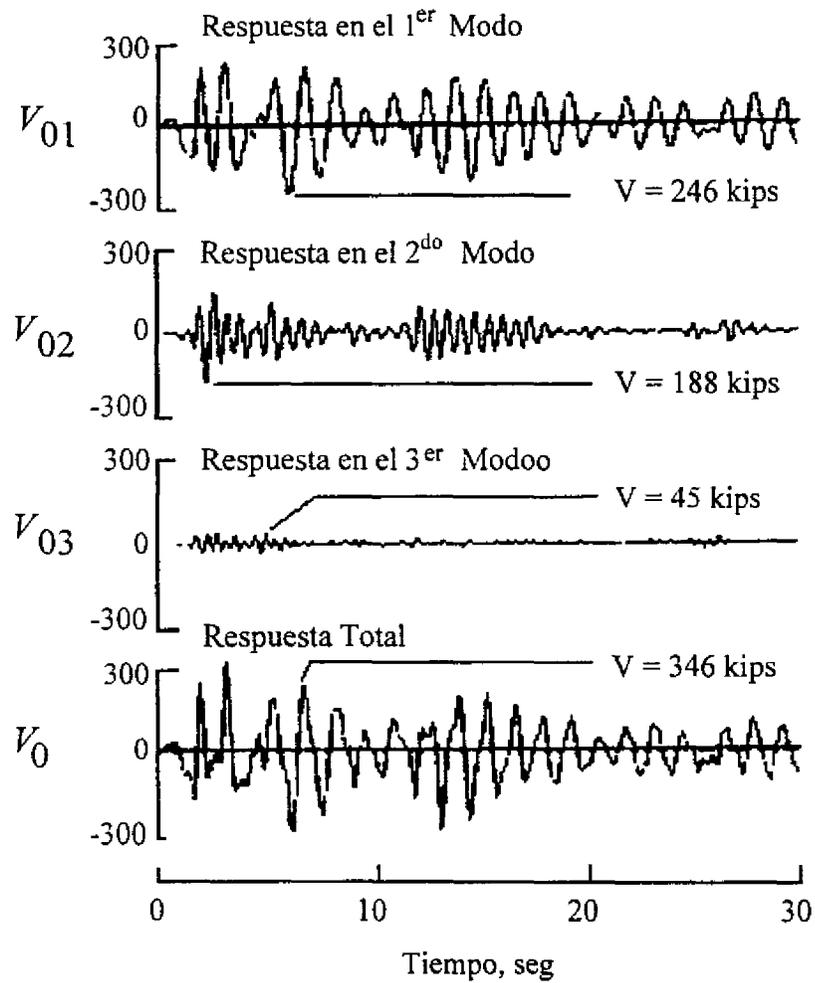


Fig. 26. Descomposición modal de la historia de cortantes en la base de la estructura.