

DISTRIBUCION DE ROTACIONES
UN NUEVO METODO PARA EL ANALISIS
DE MARCOS DE VARIOS PISOS

Jorge A. Rodríguez-Deras, M.Sc.

Director, Centro de Investigaciones Geotécnicas,
Ministerio de Obras Públicas de El Salvador.

Profesor, Dept. Ingeniería
Universidad Centroamericana José Simeón Cañas (UCA),
San Salvador, El Salvador.

Consultor privado.

RESUMEN

Este método desarrollado por quien aquí escribe y denominado Método de Distribución de Rotaciones, permite efectuar el análisis de vigas continuas o marcos rígidos utilizando un proceso de aproximaciones sucesivas, autocorrectivo y de rápida convergencia.

El método se clasifica como un método de deformaciones y es por naturaleza exacto, es decir satisface plenamente condiciones de equilibrio y de compatibilidad de las deformaciones.

La parte que se presenta constituye esencialmente un resumen del Capítulo I del libro que con el mismo nombre (1), se encuentra en proceso de ser publicado, y en el que además se aplica el Método a otros casos usuales en la práctica de la Ingeniería Estructural.

Entre las características básicas del método, y que lo distinguen de otros procedimientos muy populares en la actualidad — Métodos de Cross, Kani y Takabeya — con el Método de Distribución de Rotaciones únicamente se requiere efectuar una iteración por nudo y también una iteración por piso, lo que ya proporciona ventajas claras sobre el resto de los procedimientos indicados; además el Método permite el análisis de marcos más complejos, tales como marcos con estructuración irregular, sistemas marco-muros (incluyendo la deformación por cortante del muro), marcos arriostrados con diagonales (incluyendo la deformación por carga axial en las diagonales), y facilita el análisis de marcos con miembros de sección variable.

El Método también se presenta en forma matricial, que lo hace muy útil para ser programado en pequeñas computadoras personales y aún de bolsillo.

A la fecha de publicación de este trabajo, este método y los de Cross y Kani, forman parte del programa de Análisis Estructural en la Universidad Centroamericana José Simeón Cañas (UCA) de El Salvador.

SIMBOLOGIA.

α_{1j}	: Coeficiente de θ_1 en la ecuación Pendiente-Deflexión.
β_{ji}	: Coeficiente de θ_j en la ecuación Pendiente-Deflexión.
τ_{1j}	: Coeficiente de ϕ_{1j} en la ecuación Pendiente-Deflexión.
ΣH	: Suma de fuerzas horizontales.
ΣM_i	: Suma de momentos de empotramiento en el nudo i.
ΣM_i	: Suma de momentos finales en el nudo i.
θ_1	: Rotación en el nudo i.
θ_{1c}	: Rotación en i de la columna ij.
θ_{1j}	: Rotación en i del miembro ij.
θ_{1v}	: Rotación en el extremo i de la viga ij.
θ_{jc}	: Rotación en el nudo j de la columna ij.
θ_{ji}	: Rotación en el nudo j del miembro ij.
θ_{jv}	: Rotación en el extremo j de la viga ij.
δ_{1c}	: Deflexión lateral relativa de la columna ij.
$\delta_p \text{ calc}$: Deflexión relativa "calculada" del piso p. Valor obtenido directamente de la hoja de iteraciones.
$\delta_p \text{ real}$: Deflexión relativa "real" del piso p.
ϕ_{1c}	: Rotación de la columna ij debido a la deflexión $\delta_p \text{ calc}$.
$\phi_p \text{ calc}$: Rotación calculada del piso p. Valor obtenido directamente de la hoja de iteraciones
$\phi_p \text{ real}$: Rotación "real" del piso p.
E	: Módulo de elasticidad del material de la sección.
FN_i	: Factor de Nudo i.
FP_p	: Factor de Piso del nivel p.
H_{1c}	: Fuerza cortante desarrollada por la columna ij.
L_{1c}	: Longitud de la columna ic.
L_p	: Altura del piso p.
M_{1c}	: Momento final en el extremo i de la columna ij.
M_{1j}	: Momento de empot. en el extremo i del miembro ij.
M_{1j}	: Momento final en el extremo i del miembro ij.
M_{1v}	: Momento final en el extremo i de la viga ij.
M_{1v}	: Momento de empotramiento en el extremo i de la viga ij
M_{jc}	: Momento final en el extremo j de la columna ij.
M_{jc}	: Momento de empotramiento en el extremo j de la columna ij.
M_{ji}	: Momento final en el extremo j del miembro ij.
M_{ji}	: Momento de empot. en el extremo j del miembro ij.
RIN_i	: Rotación Inicial del Nudo i.
RIP_p	: Rotación Inicial del Piso p.
RN_i	: Rigidez del Nudo i.
RP_p	: Rigidez del Piso p.
V_p	: Fuerza cortante aplicada al piso p.

1.0 INTRODUCCION.

Como se sabe, el análisis de marcos de varios pisos requiere la manipulación de un elevado número de variables por tratarse de estructuras altamente hiperestáticas. En la literatura técnica se suelen encontrar diferentes procedimientos para efectuar dicho análisis de los cuales los métodos de aproximaciones sucesivas gozan de gran popularidad en el caso de utilizarse un procedimiento manual para resolver las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad. Sin embargo, con la accesibilidad de las computadoras digitales los procedimientos matriciales reducen la carga operacional al analista de estructuras aunque normalmente requieren la utilización de programas más o menos sofisticados y el empleo de computadoras con elevada capacidad de memoria.

Entre las ventajas que ofrece el procedimiento que aquí se presenta sobre los métodos de aproximaciones sucesivas como los de Cross, Kani o Takabeya, se puede destacar que el método que se expone requiere solamente una iteración por nudo - exterior o interior - en lugar de cuatro iteraciones por nudo interior en el Método de Kani, por ejemplo.

La determinación del desplazamiento lateral relativo de un piso requiere - con el Método de Kani - efectuar iteraciones para cada columna, no así con el método que se propone y que únicamente requiere una iteración por piso, independientemente de la cantidad de columnas que posea el piso en cuestión.

Para finalizar esta parte introductoria, debe mencionarse que el método también se aplica para analizar marcos de estructuración irregular, acoplados a muros (se incluye la deformación por cortante en el muro), con miembros diagonales (se incluye la deformación por carga axial en las diagonales), y también a marcos con miembros de sección variable entre los nudos - ya sean vigas o columnas (cartelas simétricas o asimétricas); aplicaciones por demás interesantes y útiles, y que además no son normalmente cubiertas por otros métodos de solución manual.

Las ecuaciones que se obtienen y constituyen la Ecuación de Nudo y la Ecuación de Piso, sugieren de una manera clara y directa el proceso iterativo que ha sido diseñado para resolverlas.

2.0 MARCOS CON MIEMBROS DE SECCION CONSTANTE Y COLUMNAS DE IGUAL ALTURA EN CADA PISO.

Los marcos estructurales rara vez se encuentran apoyados de tal manera que sus nudos no sufran desplazamientos y en particular desplazamientos laterales.

El desplazamiento lateral de un marco puede ocurrir por varias causas, entre las que se puede mencionar la aplicación de cargas laterales - sismo o viento - y aún bajo cargas gravitacionales tales como el peso propio y la carga viva; este tipo de desplazamiento puede ocurrir debido a la asimetría de las cargas verticales, asimetría geométrica del marco en sí, y asimetría de rigideces de los miembros del marco.

Desarrollo para Solución Manual.

El marco a que se refiere la deducción que continúa se puede ver en la Figura 1.

Utilizando como base las expresiones Pendiente-Deflexión en su forma general y en las que se incluye el efecto del desplazamiento horizontal relativo δ_{ij} que ocurre entre los extremos de cada columna ij , se tiene para las columnas,

$$M_{ic} = \alpha_{ic} \cdot \theta_{ic} + \beta_{jc} \cdot \theta_{jc} + \bar{M}_{ic} - \frac{6EI}{L^2_{ic}} \cdot \delta_{ic} \quad (1)$$

$$M_{jc} = \alpha_{jc} \cdot \theta_{jc} + \beta_{ic} \cdot \theta_{ic} + \bar{M}_{jc} - \frac{6EI}{L^2_{ic}} \cdot \delta_{ic} \quad (2)$$

en las que el segundo subíndice i o j , según el caso, se ha substituído por c para indicar que las expresiones se refieren a las columnas unicamente; también se han eliminado los subíndices ic para el momento de inercia I de los miembros. Considerando que para el análisis para cargas laterales (sismo específicamente) se consideran los cortantes aplicados en los nudos, las expresiones (1) y (2) se pueden simplificar haciendo igual a cero los momentos de empotramiento,

$$\bar{M}_{ic} = \bar{M}_{jc} = 0$$

por lo que,

$$M_{ic} = \alpha_{ic} \cdot \theta_{ic} + \beta_{jc} \cdot \theta_{jc} - \frac{6EI}{L^2_{ic}} \cdot \delta_{ic} \quad (3)$$

$$M_{jc} = \alpha_{jc} \cdot \theta_{jc} + \beta_{ic} \cdot \theta_{ic} - \frac{6EI}{L^2_{ic}} \cdot \delta_{ic} \quad (4)$$

Estas mismas expresiones pueden simplificarse aún más, y transformarse también a formas más útiles, observando que para miembros rectilíneos de sección constante,

$$\alpha_{ic} + \beta_{jc} = \frac{6EI}{L_{ic}} \quad (5)$$

y haciendo,

$$\phi_{ic} = \frac{\delta_{ic}}{L_{ic}} \quad (6)$$

$$\tau_{ic} = \alpha_{ic} + \beta_{jc} \quad (7)$$

se tiene entonces que,

$$\frac{6EI}{L^2_{1c}} \cdot \delta_{1c} = \tau_{1c} \cdot \phi_{1c} \quad (8)$$

en donde ϕ_{1c} es la rotación (positiva) del piso, al ocurrir una deflexión relativa δ_{1c} hacia la derecha (positiva), según se muestra en la Figura 2.

Sustituyendo la expresión (8) en las ecuaciones para M_{1c} y M_{3c} (3) y (4) se tiene,

$$M_{1c} = \alpha_{1c} \cdot \theta_{1c} + \beta_{3c} \cdot \theta_{3c} - \tau_{1c} \cdot \phi_{1c} \quad (9)$$

$$M_{3c} = \alpha_{3c} \cdot \theta_{3c} + \beta_{1c} \cdot \theta_{1c} - \tau_{1c} \cdot \phi_{1c} \quad (10)$$

Para continuar se cuantificará la rotación θ_i que sufre un nudo del marco. Esta rotación o giro posee dos componentes: una debida a las rotaciones de los nudos circundantes y otra adicional debida a la deflexión lateral relativa del piso, que se refleja en el nudo i como rotación.

Analizando entonces un nudo cualquiera al que llegan vigas y columnas se tiene, aplicando las expresiones (9) y (10), y observando que para que el nudo i se encuentre en equilibrio se requiere entonces que,

$$\begin{aligned} \Sigma M_i &= 0 \\ \dots \quad 0 &= \Sigma M_{iv} + \Sigma M_{ic} \\ \dots \quad \Sigma \alpha_{iv} \cdot \theta_{iv} + \Sigma \beta_{jv} \cdot \theta_{jv} + \Sigma \bar{M}_i \\ &\quad + \Sigma \alpha_{1c} \cdot \theta_{1c} + \Sigma \beta_{3c} \cdot \theta_{3c} - \Sigma \tau_{1c} \cdot \phi_{1c} = 0 \end{aligned}$$

en la que debe hacerse notar que,

$$\theta_{ij} = \theta_{iv} = \theta_{ic}$$

$$\Sigma \bar{M}_i = \Sigma \bar{M}_{iv}$$

debido a que se considera que los nudos son rígidos, por lo que la rotación del nudo es común para cada miembro en dicho nudo. Considerando lo anterior se puede escribir,

$$\Sigma \alpha_{ij} \cdot \theta_{ij} + \Sigma \beta_{ji} \cdot \theta_{ji} + \Sigma \bar{M}_i - \Sigma \tau_{1c} \cdot \phi_{1c} = 0$$

Obsérvese que θ_{ji} es la rotación en j de cada miembro que concurre en i y que en general son diferentes entre sí.

Despejando entonces θ_{ij} en la expresión anterior y haciendo $\phi_p = \phi_{1c}$ y $L_p = L_{1c}$ debido a que la rotación o giro de todas las columnas del piso son iguales entre sí por tratarse de columnas de igual longitud (el caso de columnas de diferente altura puede ser encontrado en la Referencia (1)), se tiene,

$$\theta_1 = - \frac{\sum \beta_{j1} \cdot \theta_{j1}}{\sum a_{1j}} + \frac{\sum \tau_{1c} \cdot \phi_p}{\sum a_{1j}} - \frac{\bar{\Sigma M}_1}{\sum a_{1j}} \quad (12)$$

Como se aprecia, la expresión (12) puede ser también utilizada para el análisis de vigas continuas si se elimina el segundo término de su miembro derecho el que inconfundiblemente representa el aporte de rotación en el nudo i del nivel p, debido a los desplazamientos relativos de los niveles inmediato superior e inferior con respecto a dicho nivel p.

La expresión anterior puede ser convenientemente simplificada para un desarrollo más práctico del Método, por lo que a continuación se definirán los siguientes parámetros,

Factor de Nudo i,

$$FN_1 = - \frac{1}{\sum a_{1j}} \quad (13)$$

Rotación Inicial de Nudo i,

$$RIN_1 = - \frac{\bar{\Sigma M}_1}{\sum a_{1j}} \quad (14)$$

o lo que es lo mismo,

$$RIN_1 = FN_1 \cdot \bar{\Sigma M}_1 \quad (15)$$

por lo que la Ecuación de Nudo con Traslación se transforma a,

$$\theta_1 = FN_1 \cdot [\sum \beta_{j1} \cdot \theta_{j1} - \sum \tau_{1c} \cdot \phi_p] + RIN_1 \quad (16)$$

Como puede notarse, una vez que se tengan aproximaciones para ϕ_p y θ_{j1} para los diferentes miembros que concurren en el nudo i, se podrá contar entonces con aproximaciones para θ_1 , por lo que ahora se necesita una expresión para estimar valores de ϕ_p .

A continuación, se considerará el equilibrio de un piso sometido a un cortante total V_p , como se muestra en la Figura 2.

Debido a la acción anterior se generan momentos y cortantes en los extremos de cada columna del piso, y que se encuentran relacionados de la manera siguiente,

$$H_{1c} = \frac{M_{1c} + M_{3c}}{L_{1c}} \quad (17)$$

en donde H_{1c} es el cortante que se produce en una de las columnas

del piso.

Substituyendo en (17) las expresiones (9) y (10), se obtiene para dicha columna,

$$H_{1c} = \frac{\alpha_{1c} \cdot \theta_{1c} + \beta_{1c} \cdot \theta_{1c} - \tau_{1c} \cdot \phi_{1c}}{L_{1c}} + \frac{\alpha_{1c} \cdot \theta_{1c} + \beta_{1c} \cdot \theta_{1c} - \tau_{1c} \cdot \phi_{1c}}{L_{1c}}$$

$$\dots H_{1c} = \frac{1}{L_{1c}} \cdot [\theta_{1c} \cdot (\alpha_{1c} + \beta_{1c}) + \theta_{1c} \cdot (\alpha_{1c} + \beta_{1c}) - 2\tau_{1c} \cdot \phi_{1c}]$$

por lo que al sumar los cortantes de todas las columnas del piso p, y considerando el equilibrio del piso, se tendrá,

$$\Sigma H_p = 0$$

$$\dots \Sigma H_{1c} + V_p = 0$$

$$\dots \Sigma \theta_{1c} \cdot (\alpha_{1c} + \beta_{1c}) + \Sigma \theta_{1c} \cdot (\alpha_{1c} + \beta_{1c}) - 2\tau_{1c} \cdot \phi_{1c} + V_p \cdot L_{1c} = 0$$

Tomando en cuenta ahora que una propiedad de las ecuaciones Pendiente-Deflexión es que,

$$\beta_{1c} = \beta_{1c}$$

la expresión (7) se transforma a,

$$\dots \tau_{1c} = \alpha_{1c} + \beta_{1c} \quad (18)$$

y entonces,

$$\Sigma \theta_{1c} \cdot \tau_{1c} + \Sigma \theta_{1c} \cdot \tau_{1c} - 2\Sigma \tau_{1c} \cdot \phi_{1c} + V_p \cdot L_{1c} = 0$$

$$\dots \Sigma \tau_{1c} \cdot (\theta_{1c} + \theta_{1c}) - 2\Sigma \tau_{1c} \cdot \phi_{1c} + V_p \cdot L_{1c} = 0$$

y como ϕ_{1c} es constante para todas las columnas del piso p, se tiene que $\phi_{1c} = \phi_p$ y al considerar que todas las columnas del piso poseen en este caso la misma longitud $L_p = L_{1c}$, la expresión anterior se reduce a,

$$\dots \phi_p = \frac{\Sigma \tau_{1c} \cdot (\theta_{1c} + \theta_{1c})}{2\Sigma \tau_{1c}} + \frac{V_p \cdot L_p}{2\Sigma \tau_{1c}} \quad (19)$$

En la expresión anterior debe notarse que se ha considerado que las columnas poseen igual altura.

Con el objeto de simplificar posteriormente la ecuación anterior, a continuación se definirán los siguientes términos:

Rigidez de Piso, para el piso p con columnas de igual altura,

$$u_p = 42\tau_{1c} \quad (20)$$

Factor de Piso, para el piso p con columnas de igual altura,

$$FP_p = \frac{1}{2\sum\tau_{1c}} \quad (21)$$

Rotación Inicial de Piso, para el piso p con columnas de igual altura,

$$RIP_p = \frac{V_p \cdot L_p}{2\sum\tau_{1c}} \quad (22)$$

o lo que es lo mismo,

$$RIP_p = FP_p \cdot (V_p \cdot L_p) \quad (23)$$

por lo que la expresión (19) se reduce entonces a,

$$\phi_p = FP_p \cdot [\sum\tau_{1c} \cdot (\theta_{1c} + \theta_{3c})] + RIP_p \quad (24)$$

Del desarrollo anterior se puede concluir que el análisis de un marco con desplazamiento lateral no restringido puede efectuarse estimando rotaciones para sus nudos y calculando con las mismas las rotaciones ϕ_p de cada piso con la expresión (24), para luego estimar nuevas aproximaciones θ_1 para cada nudo, con la ayuda de la expresión (16).

A continuación se indicarán los pasos a seguir para el análisis manual de un marco de varios pisos, utilizando tales expresiones y para pisos con columnas de igual altura en cada piso.

Cálculos Iniciales.

1. Momentos de empotramiento \bar{M}_{1j} y \bar{M}_{j1} en cada extremo de los miembros.
2. Factores de Nudo FN_1 , que se anotarán en los nudos del marco.
3. Factores de Piso FP_p , que se registrarán a cada lado de cada piso.
4. Rotaciones Iniciales de Nudo, RIN_1 .
5. Rotaciones Iniciales de Piso, RIP_p .

Cálculos de Procedimiento.

1. Como primera aproximación para la rotación ϕ_p de un piso, considérese igual a las rotaciones iniciales RIP_p .
2. Como primera aproximación para la rotación θ_1 de los nudos, considérese igual a las rotaciones iniciales RIN_1 .

Es importante destacar que en las expresiones Pendiente-Deflexión

para miembros rectilíneos de sección constante $\alpha_{ij} = 4EI/L_{ij}$ y $\beta_{ji} = 2EI/L_{ij}$, por lo que si se conocen las rigideces relativas de los miembros k_i , estas podrían utilizarse como β_{ji} y entonces $\alpha_{ij} = 2k_{ij}$.

Ejercicio Ilustrativo 1.

A continuación se resolverá el marco que se muestra en la Figura 3.

En este ejemplo se ha seguido un estricto orden de cálculo desde el nudo 1 hasta el nudo 11 (para cada iteración) con el objeto de que quien lo desee, pueda seguir sin dificultad las operaciones efectuadas.

Las rotaciones ϕ_p de cada piso se calcularon después de determinar las rotaciones de los nudos de la primera iteración; así por ejemplo,

Factor de Nudo 1 :

$$FN_1 = - \frac{1}{(2 \times 0.1 + 2 \times 1.5)}$$

$$= - 0.3125$$

Rotación Inicial de Nudo 1:

$$RIN_1 = -0.3125 \times (-2.40)$$

$$= + 0.75$$

Factores r_{ic} .

Como se nota en la expresión (24) los valores de ϕ_p tienen que calcularse utilizando los factores r_{ic} para cada columna del piso que se considere; sin embargo para miembros rectilíneos de sección constante se sabe que $\alpha_{ij} = 4 \beta_{ji}$, y que $\beta_{ic} = 2 \beta_{jc}$, por lo que puede deducirse que $r_{ic} = \alpha_{ic} + \beta_{jc} = \alpha_{ic} + \beta_{ic}$ y por lo tanto $r_{ic} = 6 \beta_{ic}$. De lo anterior se concluye que se puede desarrollar las expresiones anteriores en función de rigideces relativas k_{ij} ó β_{ji} sin que aparezca r_{ic} , con lo cual se ahorraría el cálculo de estos últimos y su inclusión en la hoja de trabajo; en realidad, el método que se presenta fué planteado así en los inicios, pero el desarrollo de otras aplicaciones sugirió unificar la forma del mismo con el objeto de no obscurecerlo innecesariamente.

Continuando con el ejemplo, para el piso 3.

$$r_{41} = 0.2 + 0.1$$

$$= 0.3$$

$$r_{52} = 0.2 + 0.1$$

$$= 0.3$$

$$\tau_{63} = 0.2 + 0.1$$

$$\text{---} = 0.3$$

en donde los subíndices corresponden a los nudos del miembro (columna).

Factores de Piso 3:

$$FP_3 = \frac{1}{2 \times (0.3 + 0.3 + 0.3)}$$

$$\text{---} = + 0.5556$$

Rotación Inicial de Piso 3:

$$RIP_3 = + 0.5556 \times (0.0000 \times L_{1c})$$

$$\text{---} = 0.0000$$

El cálculo de cada iteración para la rotación del nudo 1, se efectúa entonces con la expresión (16),

$$\theta_1 = FN_1.(\sum \beta_{j1}.\theta_{j1} - \sum \tau_{1c}.\phi_3) + RIN_1$$

y que de manera desarrollada se escribe,

$$\theta_1 = FN_1.(\beta_{12}.\theta_{21} + \beta_{14}.\theta_{41} - \tau_{41}.\phi_3) + RIN_1$$

El cálculo de cada iteración de la Rotación de Piso 3 se efectúa con (24),

$$\phi_3 = FP_3.[\sum \tau_{1c}.(\theta_{1c} + \theta_{j c})] + RIP_3$$

y que de manera desarrollada se escribe,

$$\phi_3 = FP_3. [\tau_{41}.(\theta_{14} + \theta_{41})] + \tau_{52}.(\theta_{25} + \theta_{52})$$

$$+ \tau_{63}.(\theta_{36} + \theta_{63})] + RIP_3$$

en la que para la primera iteración se puede substituir θ_{1j} y θ_{j1} por las Rotaciones Iniciales de Nudo correspondientes. Así por ejemplo, para la primera iteración de Rotación de Piso del último piso,

$$\phi_3 = + 0.5556 \times [(+0.21 + 0.20) \times 0.3 + (+2.01 + 1.03) \times 0.3$$

$$+ (-5.44 + 0.24) \times 0.3] + 0.00$$

$$\text{---} = - 0.2917$$

y para la segunda iteración del nudo 1,

$$\theta_1 = -0.3125 \times [(+2.01 \times 1.5 + 0.20 \times 0.1 - (-0.2917 \times 0.3))$$

$$+ 0.75$$

$$\text{---} = - 0.23$$

y así sucesivamente.

En la Figura 4 se muestra el proceso completo de los cálculos efectuados.

Los momentos finales pueden entonces ser calculados, para el nudo 1,

$$M_{12} = 2 \times 1.5 \times (-0.41) + 1.5 \times 2.40 - 2.40$$

$$\text{---} = - 0.03 \text{ ton-mt.}$$

$$M_{14} = 2 \times 0.1 \times (-0.41) + 0.1 \times 0.19 - (-0.43) \times 0.3$$

$$\text{---} = + 0.07 \text{ ton-mt.}$$

Para el nudo 2,

$$M_{21} = 2 \times 1.5 \times 2.40 + 1.5 \times (-0.41) + 2.40$$

$$\text{---} = + 8.99 \text{ ton-mt.}$$

$$M_{23} = 2 \times 1.2 \times 2.40 + 1.2 \times (-5.70) - 8.60$$

$$\text{---} = - 9.68 \text{ ton-mt.}$$

$$M_{25} = 2 \times 0.1 \times 2.40 + 0.1 \times 0.79 - 0.3 \times (-0.43)$$

$$\text{---} = + 0.69 \text{ ton-mt.}$$

y para los nudos 8 y 12,

$$M_{84} = 2 \times 0.2 \times 0.09 + 0.2 \times 0.19 - 0.6 \times (-0.71)$$

$$\text{---} = + 0.50 \text{ ton-mt.}$$

$$M_{88} = 2 \times 1.5 \times 0.09 + 1.5 \times 0.88 - 2.40$$

$$\text{---} = - 0.81 \text{ ton-mt.}$$

$$M_{8-12} = 2 \times 0.2 \times 0.09 + 0.2 \times 0.00 - 0.6 \times (-0.44)$$

$$\text{---} = + 0.30 \text{ ton-mt.}$$

$$M_{12-8} = 2 \times 0.2 \times 0.00 + 0.2 \times 0.09 - 0.6 \times (-0.44)$$

$$\text{---} = + 0.28 \text{ ton-mt.}$$

A continuación se procederá a la determinación de los desplazamientos laterales de los tres pisos, lo que proporcionará información adicional sobre el comportamiento del marco analizado.

Para efectuar lo anterior es conveniente recordar que los momentos de empotramiento y las rotaciones iniciales de piso fueron calculados utilizando toneladas y metros en las unidades, y además que,

$$\phi_p = \phi_{1c} = \frac{\delta_{1c}}{L_{1c}}$$

$$\dots \delta_{1c} = \phi_p \cdot L_{1c}$$

y considerando que las rigideces β_{j1} que se emplearon fueron n/L_{1j} (en donde n es una constante proporcional a las rigideces reales del miembro; I_c es el momento de inercia base que se ha considerado) en lugar de $2EI_{0n}/L_{1j}$, las rotaciones obtenidas son

2EI_o veces las reales, por lo que,

$$\delta_p \text{ real} = \delta_p \text{ calc} / 2EI_o \quad (25)$$

Deberá notarse además que los desplazamientos determinados son desplazamientos relativos de piso a piso.

En vista de lo anterior se puede concluir que un marco ortogonal con columnas de igual altura en cada piso y con nudos desplazables horizontalmente, puede analizarse por un proceso iterativo matricial con las expresiones (16) y (24).

3.0 MARCOS CON COLUMNAS ARTICULADAS EN LA BASE.

La rapidez de convergencia del proceso iterativo diseñado, depende en gran medida de la relación de rigideces entre las vigas y columnas. Así por ejemplo, cuando se tienen columnas muy rígidas con respecto a las vigas, la convergencia se torna más lenta por lo que se requiere efectuar un mayor número de ciclos de cálculo.

Otro de los casos de convergencia lenta lo constituye el marco con columnas articuladas en la base.

En tal situación se hace posible acelerar el proceso iterativo y al mismo tiempo reducir la cantidad de nudos en donde se requiere efectuar iteraciones, lo que se logra con el empleo de un artificio analítico, como se ilustrará a continuación.

Considérese una columna recta ij de sección constante, en la que el extremo j se encuentra articulado a la base.

Para tal elemento se puede escribir el momento final en el extremo j,

$$M_{jc} = \alpha_{jc} \cdot \theta_{jc} + \beta_{jc} \cdot \theta_{ic} - \tau_{jc} \cdot \phi_{jc} \quad (10)$$

por lo que al tomar en cuenta que por tratarse el extremo j de una articulación se tiene que $M_{ji} = 0$, y despejando entonces θ_{jc} en tal ecuación, se tendrá,

$$\theta_{jc} = - \frac{\beta_{ic}}{\alpha_{jc}} \cdot \theta_{ic} + \frac{\beta_{ic}}{\alpha_{jc}} \cdot \phi_{jc} + \phi_{jc} \quad (26)$$

Escribiendo ahora el momento para el extremo i, se tiene,

$$M_{ic} = \alpha_{ic} \cdot \theta_{ic} + \beta_{jc} \cdot \theta_{jc} - \tau_{ic} \cdot \phi_{ic} \quad (9)$$

por lo que al considerar que en general se cumple,

$$\beta_{ic} = \beta_{jc}$$

$$\phi_{ic} = \phi_{jc}$$

$$\tau_{jc} = \alpha_{jc} + \beta_{ic}$$

$$\tau_{1c} = \alpha_{1c} + \beta_{jc}$$

se puede escribir, sustituyendo (26) en (9),

$$M_{1c} = \left(\alpha_{1c} - \frac{\beta_{1c} \cdot \beta_{jc}}{\alpha_{jc}} \right) \cdot \theta_{1c} - \left(\tau_{1c} - \beta_{jc} - \frac{\beta_{1c} \cdot \beta_{jc}}{\alpha_{jc}} \right) \cdot \phi_{1c} \quad (27)$$

Tomando en consideración que para miembros de sección constante,

$$\begin{aligned} \alpha_{1c} &= \alpha_{jc} \\ &\quad \delta_{1c} \\ \phi_{1c} &= \frac{\delta_{1c}}{L_{1c}} \end{aligned}$$

la ecuación (27) se transforma en,

$$M_{1c} = \left(\alpha_{1c} - \frac{\beta_{jc}^2}{\alpha_{1c}} \right) \cdot \theta_{1c} - \left(\tau_{1c} - \beta_{jc} - \frac{\beta_{jc}^2}{\alpha_{1c}} \right) \cdot \phi_{1c} \quad (28)$$

Comparando ahora la expresión (28) con la ecuación (9) se puede considerar que la expresión (28) se refiere a una columna hipotética,

$$M_{1c} = (\alpha_{1c})' \cdot \theta_{1c} + (\beta_{jc})' \cdot \theta_{jc} - (\tau_{1c})' \cdot \phi_{1c} \quad (29)$$

en la que,

$$(\alpha_{1c})' = \left(\alpha_{1c} - \frac{\beta_{jc}^2}{\alpha_{1c}} \right) \quad (30)$$

$$(\beta_{jc})' = 0 \quad (31)$$

$$(\tau_{1c})' = \left(\tau_{1c} - \beta_{jc} - \frac{\beta_{jc}^2}{\alpha_{1c}} \right) \quad (32)$$

Las expresiones (30), (31) y (32) pueden ser evaluadas para miembros de sección constante, por lo que,

$$(\alpha_{1c})' = 3EI/L_{1c} \quad (33)$$

$$(\beta_{jc})' = 0 \quad (34)$$

$$(\tau_{1c})' = 3EI/L_{1c} \quad (35)$$

Lo anterior permite concluir que con el objeto de evitar tener que efectuar la iteración en la articulación de una columna, ésta puede ser substituida en el modelo analítico por otra en que α_{1c} sea igual a los 3/4 del valor original; que β_{jc} sea igual a cero, y que τ_{1c} sea igual a 1/2 del gamma de la columna original.

En el ejemplo que se presenta a continuación se muestra la aplicación de las expresiones anteriores.

Ejercicio Ilustrativo 2.

A continuación se analizará el marco que se muestra en la Figura 5 utilizando los conceptos desarrollados en el apartado anterior, con el objeto de reducir el número de ciclos de cálculo que se requieren, así como evitar tener que efectuar iteraciones para los nudos articulados.

En la tabla siguiente se muestran los valores ajustados de α_{ij} , β_{ji} y τ_{ij} que corresponden al nuevo modelo,

Elem	VALORES ABS.			VALORES RELATIVOS		
	α_{ij}	β_{ji}	τ_{ij}	α_{ij}	β_{ji}	τ_{ij}
1-2	0.300	0.0	0.300	0.901	0.0	0.901
4-3	0.300	0.0	0.300	0.901	0.0	0.901
2-3	0.667	0.333	—	2.000	1.000	—

Factores de Nudo.

$$\begin{aligned}
 FN_2 &= - \frac{1}{0.901 + 2.000} \\
 &= - 0.3447 \\
 FN_3 &= - 0.3447
 \end{aligned}$$

Momentos de Empotramiento.

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_{23} &= - \frac{24 \times 6^3}{12^2} \\
 &= - 36.0 \text{ Kip-pie.}
 \end{aligned}$$

$$\bar{M}_{32} = + 36.0 \text{ Kip-pie.}$$

Rotaciones Iniciales de Nudo.

$$\begin{aligned}
 R_{IN2} &= -0.3447 \times (-36.0) \\
 &= + 12.409 \\
 R_{IN3} &= -0.3447 \times (+36.0) \\
 &= - 12.409
 \end{aligned}$$

Factores de Piso.

$$FP_1 = + \frac{1}{0.901 + 0.901}$$

$$= + 0.5549$$

Rotaciones Iniciales de Piso.

$$RIP_1 = + 0.5549 \times (12 \times 10)$$

$$= + 66.588$$

En la Figura 6 se presenta la hoja de cálculo con las siete iteraciones efectuadas.

Momentos Finales.

Como los momentos finales en las articulaciones son cero, no se requiere efectuar ningún cálculo para tales nudos.

$$M_{21} = 0.901 \times 38.934 - 0.901 \times 86.585$$

$$= - 42.93 \text{ kip-pie}$$

$$M_{23} = 2.000 \times 38.934 + 1.000 \times 1.062 - 36.0$$

$$= + 42.93 \text{ kip-pie}$$

$$M_{32} = 2.000 \times 1.062 + 1.000 \times 38.934 + 36.0$$

$$= + 77.058 \text{ kip-pie}$$

$$M_{34} = 0.901 \times 1.062 - 0.901 \times 86.585$$

$$= - 77.058 \text{ kip-pie}$$

CONCLUSIONES.

Se ha observado, el método que se ha diseñado posee las siguientes características:

- Es un método exacto
- De aproximaciones sucesivas
- Autocorrectivo
- De rápida convergencia.
- Permite comprender claramente el fenómeno físico.
- El procedimiento numérico es fácil de recordar.
- Se requieren efectuar muy pocas operaciones en la hoja de cálculo.
- Unicamente se requiere efectuar una iteración por nudo.
- Unicamente se requiere efectuar una iteración por piso.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

- Distribución de Rotaciones; Un Nuevo Método para el Análisis de Vigas Continuas y Marcos de Varios Pisos: 300 pags; Jorge A. Rodríguez-Deras; El Salvador, Diciembre de 1988. En proceso de publicación en México.
- Arches, Continuous Frames, Columns and Conduits; Selected Papers of Hardy Cross; University of Illinois Press, Urbana; 1968.
- Cálculo de Pórticos de Varios Pisos; G. Kani; Editorial Reverté, S.A.; Barcelona - Buenos Aires - México; MCMLVIII.
- Estructuras de Varios Pisos; Cálculo y Tablas de Momentos; Takabeya F.; México, Continental 1982.

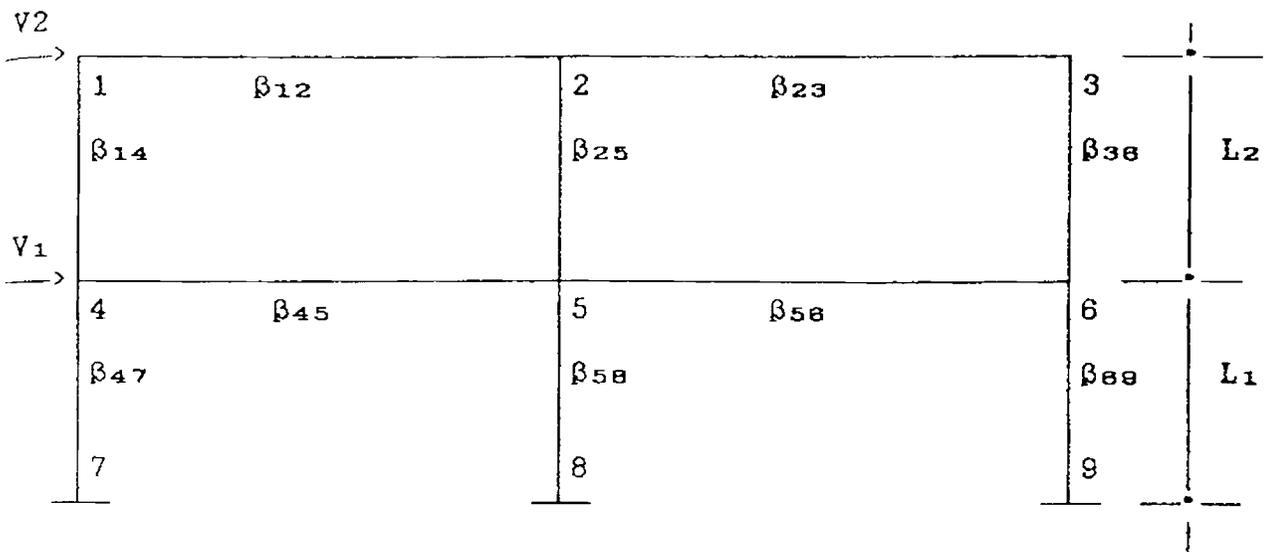


FIGURA 1

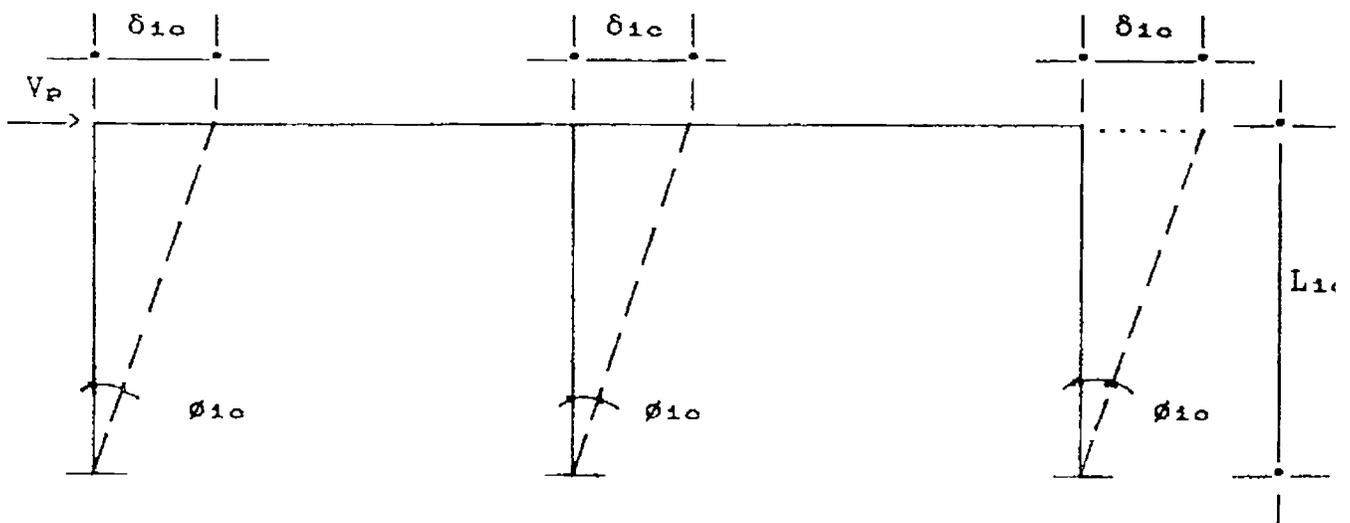


FIGURA 2

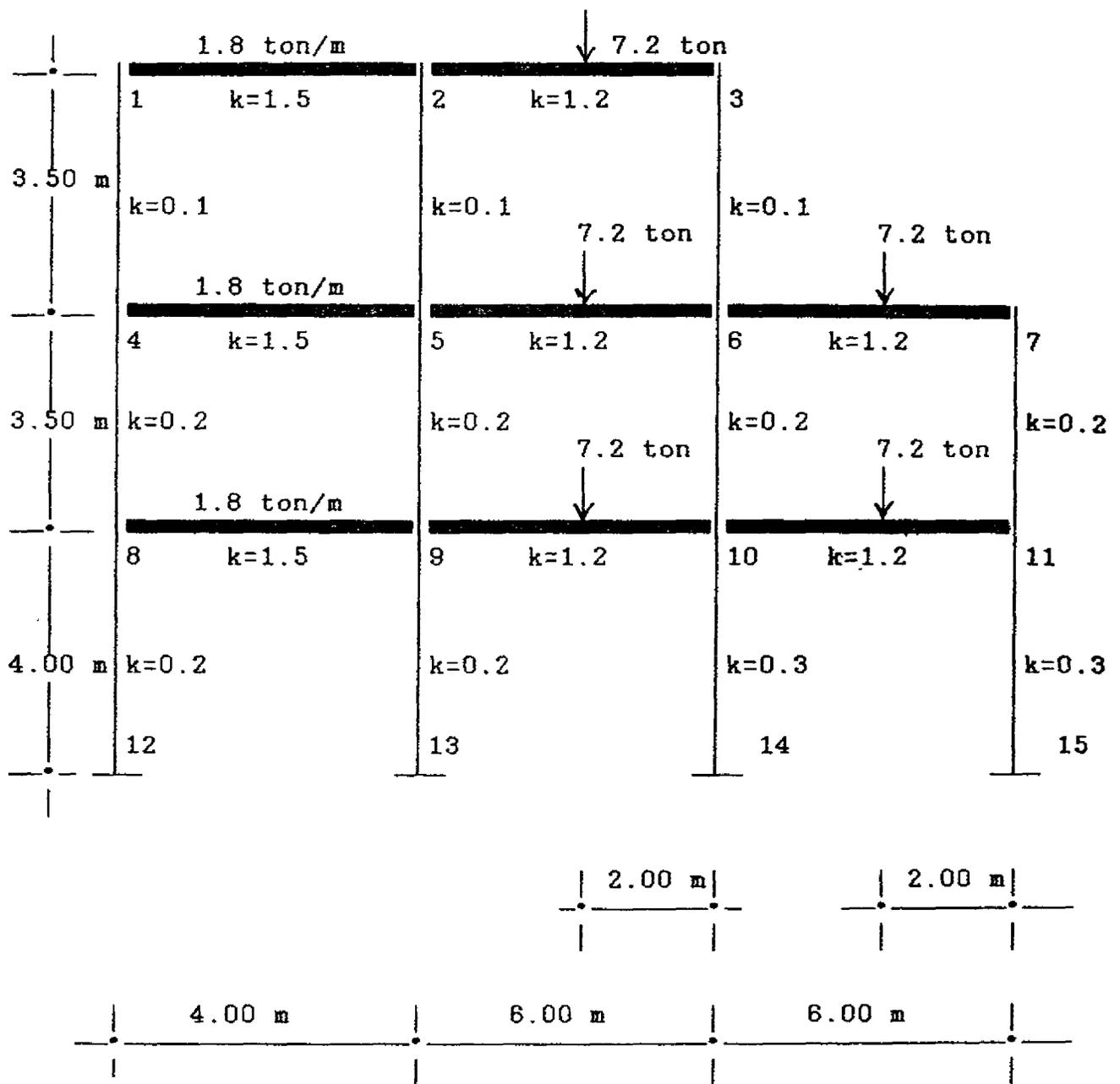


FIGURA 3

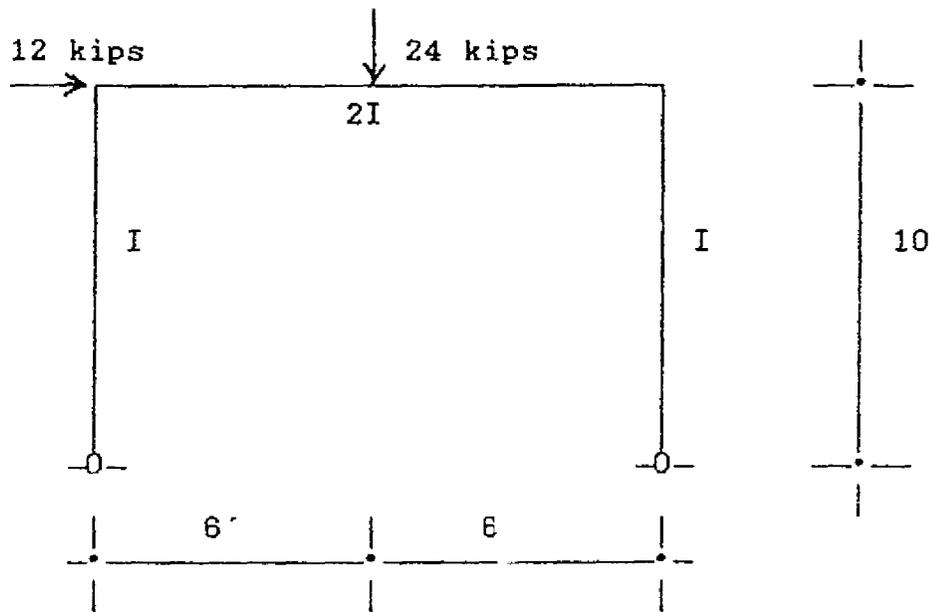


FIGURA 5

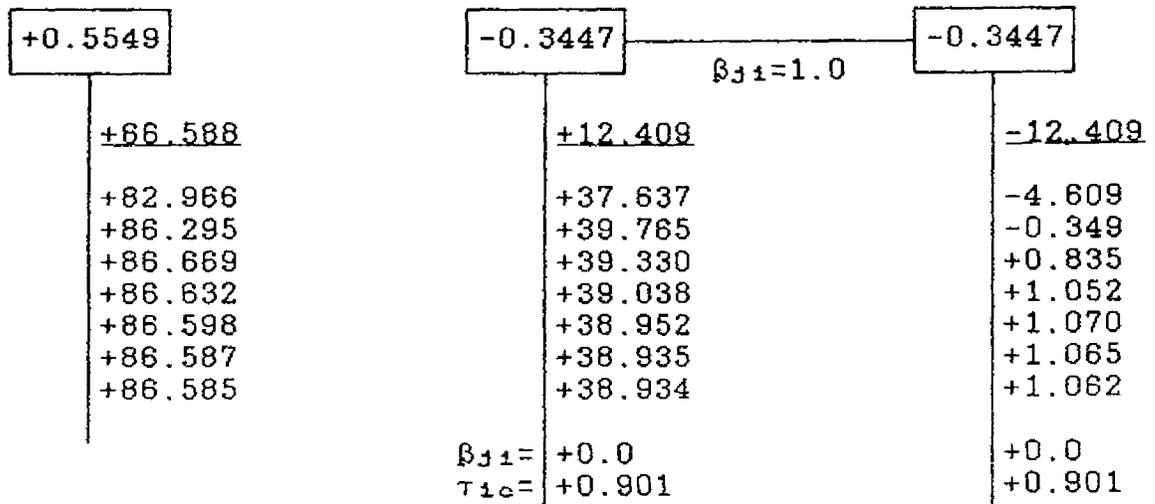


FIGURA 6