

CAPÍTULO 4

VOLUMEN DE INUNDACIÓN POR DESBORDAMIENTO DEL RÍO

El cálculo del volumen de inundación esperado en un año de un río se basa en las siguientes consideraciones:

a) El volumen de inundación se presenta cuando es insuficiente el cauce para conducir los gastos del hidrograma de entrada con período de retorno T .

b) El volumen de inundación se obtiene por medio del modelo de simulación de flujo no permanente cuando la elevación de la superficie libre del agua que fluye por el cauce del río excede la elevación de los bordos.

4.1 ESTIMACIÓN DE VOLÚMENES DE INUNDACIÓN

Los volúmenes de inundación que suceden en el río cuando presenta una avenida de período de retorno T se acumulan durante el tránsito de la avenida calculado con el modelo de simulación mencionado.

La probabilidad de excedencia P_e en cualquier año de un gasto con período de retorno T , esta dada como

$$P_e = \frac{1}{T}$$

y la de no excedencia será

$$P = 1 - \frac{1}{T} \quad (4.1)$$

El volumen de inundación depende de los gastos de las avenidas que se presentan en el río, como cada avenida está asociada a la probabilidad P , resulta entonces que este volumen también está relacionado con esta probabilidad P . Así se puede dibujar una gráfica de volumen de inundación contra la probabilidad P como se muestra en la figura 4.1.

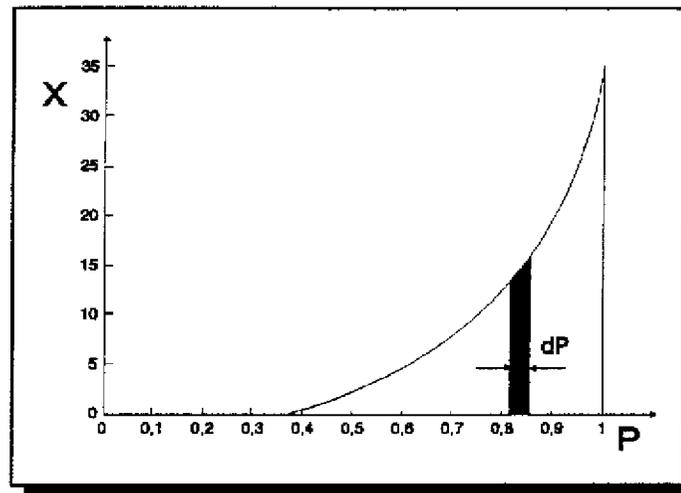


Figura 4.1 Determinación del volumen esperado de inundación

Por otra parte, si $p(x)$ es la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria x (en este caso el volumen de inundación), entonces

$$P(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx \quad (4.2)$$

corresponde a la función de distribución acumulada de $p(x)$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral

$$dP(x) = p(x) dx \quad (4.3)$$

multiplicando ambos miembros de esta última ecuación por x resulta

$$x dP(x) = x p(x) dx \quad (4.4)$$

integrando

$$\int_0^1 x dP(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = E(x) \quad (4.5)$$

Este resultado muestra que el área bajo la curva de la figura 4.1 es la esperanza o valor esperado de la variable aleatoria x .

4.2 COSTO TOTAL DE LA OBRA DE MODIFICACIÓN AL CAUCE

Se considera que para juzgar la bondad de un proyecto de una obra diseñada con base en el periodo de retorno T con vida útil de L años, con la finalidad de evitar o disminuir los daños por inundación; se debe comparar la suma de costos de inversión de la obra, de mantenimiento de la misma y de los daños por inundación que persistieran después de construída la obra, con respecto al costo de los daños que existen antes de la construcción de la obra ($C_{TR \text{ sin}}$). Si la suma de costos es menor, la obra se justifica por razones puramente económicas. Desde luego, en caso de que la inundación provocase la pérdida de vidas humanas y la obra redujera la probabilidad de que se presentara esta pérdida, debe prevalecer el criterio de que la obra tiene razón de ejecutarse independientemente de su costo.

La elección del periodo de retorno se fundamenta en que la suma de costos antes mencionada sea lo más pequeña posible. Para obtenerla se plantea como referencia de comparación, que su cálculo se establezca al final de la vida útil de la obra (se considera igual para todos los diseños de la obra).

4.2.1 Costo de inversión

Si el costo de la obra es C_0 y el interés bancario es i , el capital que se tendría al final de L años de vida útil de la obra sería igual a

$$C_{T0} = C_0 (1 + i)^L \quad (4.6)$$

4.2.2 Costo de daños por inundación

Por otra parte, al hacer la obra para la avenida de periodo de retorno T el costo anual por inundaciones es

$$C_R = C_d \bar{V} \quad (4.7)$$

donde \bar{V} es el volumen de inundación esperado en cada año y C_d es el costo del daño por

cada m^3 de volumen de inundación. Además este costo es diferido a lo largo de los L años, de modo que lo pagado al final del primer año correspondería a $C_R(1+i)^0$. Al terminar el segundo año lo pagado sería $C_R(1+i)^0 + C_R(1+i)^1$. Al final del tercer año se tendrá un gasto de $C_R(1+i)^0 + C_R(1+i)^1 + C_R(1+i)^2$ y, así al final del año L resultará que

$$C_{TR} = C_R \sum_{n=0}^{L-1} (1+i)^n \quad (4.8)$$

De este modo, C_{TR} es el costo al final del año L por concepto de los daños ocasionados por las inundaciones.

Al tomar en cuenta el valor de la suma incluida en la ecuación 4.8 se tiene que

$$C_{IR} = C_R \sum_{n=0}^{L-1} (1+i)^n = C_R \left(\frac{(1+i)^L - 1}{i} \right) \quad (4.9)$$

4.2.3 Costo de mantenimiento

De manera similar a lo planteado para el costo de los daños, si C_m es el costo anual de mantenimiento de la obra de protección al final de L años, el costo total de mantenimiento será

$$C_{TM} = C_m \left(\frac{(1+i)^L - 1}{i} \right) \quad (4.10)$$

Como la suma de los costos relativos a la construcción, mantenimiento y de reparación de los daños depende del periodo de retorno escogido para el diseño de la obra, se requiere de obtener el periodo de retorno óptimo, que será aquél para el cual la suma de costos relativos es mínima.

Así para que se justifique económicamente la ejecución de la obra, la suma de los costos relativos mínima debe ser la menor a la de los daños sin obra.

Esto es, conviene seleccionar la obra para la cual

$$C_T = C_0 (1+i)^L + C_m \left[\frac{(1+i)^L - 1}{i} \right] + C_d \bar{V} \left[\frac{(1+i)^L - 1}{i} \right]$$

es mínima, sea, $C_{T \min} = C_T$.

Si $C_{TR \sin}$ es el costo de daños antes de construir la obra, para que sea factible la construcción de la obra por motivos económicos es necesario que $C_{T \min}$ sea menor que $C_{TR \sin}$.

CAPÍTULO 5

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

El río Papaloapan tiene como principales afluentes a los ríos Santo Domingo, Tonto, Valle Nacional, Obispo, Tesechoacán, San Juan y Tecomate (Figura 5.1). Los dos primeros contribuyen aproximadamente con el 30 % del total que recibía el río Papaloapan antes de la construcción en ellos de las presas Miguel de la Madrid y Miguel Alemán. Aunque estas presas pueden almacenar los escurrimientos de estos dos ríos, no evitan la ocurrencia de inundaciones en extensas zonas de la parte baja de la cuenca del río Papaloapan, incluyendo los poblados de Cosamaloapan y Tlacotalpan. Ésto se debe a los gastos grandes de los restantes ríos.

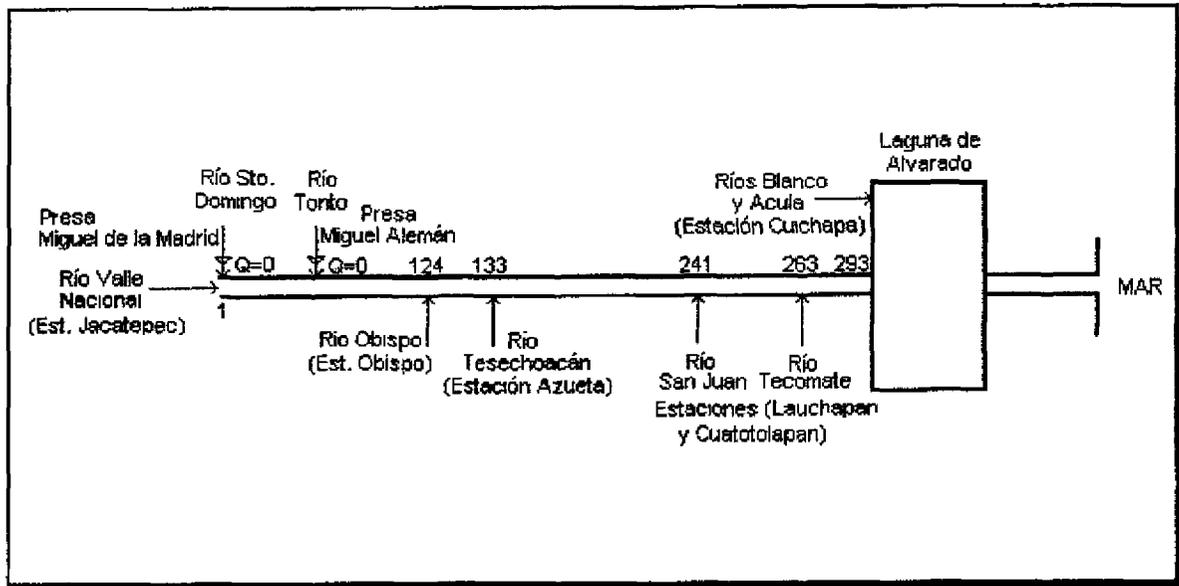


Figura 5.1 Croquis de localización de los afluentes del río Papaloapan

Se presenta el cálculo de los volúmenes de inundación de la parte del río Papaloapan comprendida entre los afluentes Tesechoacán y San Juan. En estos ejemplos, se consideraron 108 secciones transversales (definidas con diez puntos contenidos en un plano vertical) con una separación máxima de 600 m en promedio, cubriendo una longitud de 45.8 km.

5.1 AVENIDA MÁXIMA ASOCIADA A UN PERIODO DE RETORNO

Con base en la información de gastos medios diarios de la estación hidrométrica Azueta se formó un arreglo día-gasto donde a partir de la fecha del gasto máximo se tomaron los valores de los gastos de siete días antes y siete días después. De los conjuntos de 14 gastos máximos de cada año, se calcularon los gastos medios en un día, en dos días, ... , 14 días. Los gastos medios anuales en m días permitieron escoger las funciones de distribución de probabilidad de mejor ajuste a sus valores; ésto se hizo para $m = 1$ día, 2 días, ... , 14 días. La función de distribución de probabilidad que dió mejor ajuste fue la Gamma.

Para obtener la forma del hidrograma, se consideró en el registro histórico a los gastos medios diarios de tres días consecutivos, que incluían al máximo anual. Se definió como 1 al máximo anual, como 2 al gasto del día anterior o posterior al máximo que fuese mayor y, como 3 al menor de los gastos de los tres días consecutivos. Se observó la frecuencia con que se presentaron los ordenamientos 123, 312, 213, 321; como el ordenamiento 312 resultó con la mayor frecuencia fue el seleccionado. Con base en este ordenamiento, se acomodaron los tres mayores gastos medios diarios estimados. Los gastos medios para los once días restantes se colocaron en los extremos derecho e izquierdo del ordenamiento de los tres mayores gastos, evitando que el acomodo diera lugar a una forma con ascensos y descensos en los valores.

Este mismo proceso se aplicó para las estaciones Jacatepec (sobre el río Valle Nacional) y Obispo (sobre el río Obispo).

En la figura 5.2 y tabla 5.1 se muestran los hidrogramas obtenidos para los distintos periodos de retorno en una estación hidrométrica Azueta.

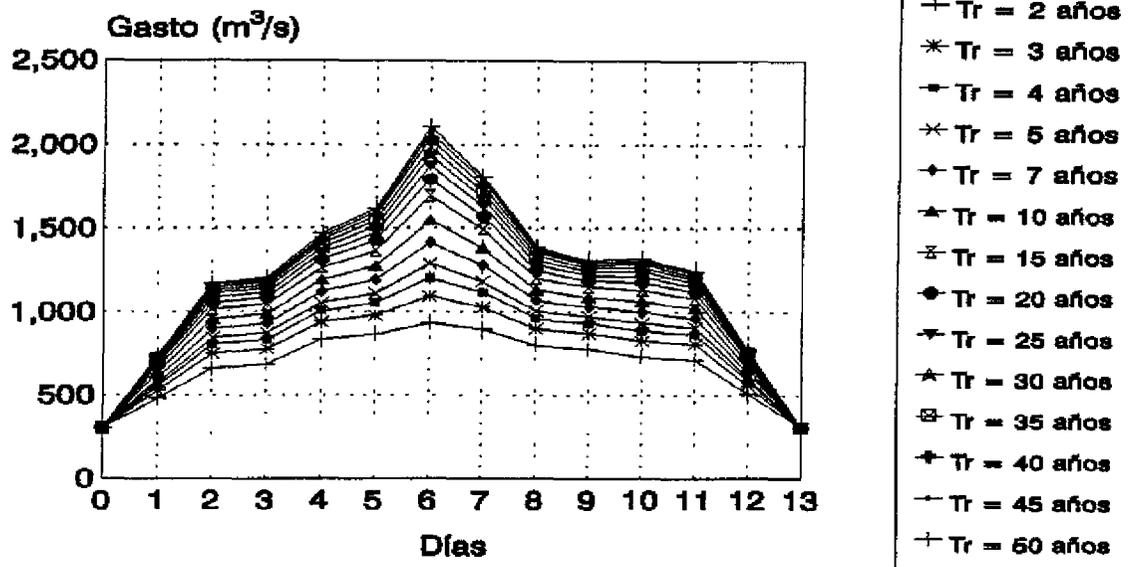


Figura 5.2 Hidrogramas estimados para diferentes periodos de retorno (Estación Azueta)

Tr=	2	3	4	5	7	10	15
día	Q(m ³ /s)						
0	304.0	304.0	304.0	304.0	304.0	304.0	304.0
1	481.0	525.9	534.6	574.4	602.1	629.5	658.7
2	657.9	749.7	805.2	844.7	900.2	955.0	1013.3
3	683.4	776.7	833.1	873.3	929.6	985.1	1044.2
4	835.4	938.8	1004.0	1051.6	1119.6	1189.1	1262.5
5	864.4	979.2	1054.1	1109.7	1190.6	1273.3	1364.3
6	929.5	1090.5	1201.6	1286.5	1412.7	1544.7	1692.2
7	895.7	1026.7	1114.8	1181.2	1279.0	1380.1	1492.5
8	799.1	897.4	958.8	1003.3	1066.8	1130.4	1199.2
9	775.6	872.1	930.1	971.4	1029.2	1085.9	1146.2
10	729.5	826.5	887.4	931.7	995.0	1058.6	1127.6
11	712.6	807.3	864.5	905.1	962.1	1018.7	1077.7
12	508.3	555.7	584.3	604.6	633.1	661.4	690.9
13	304.0	304.0	304.0	304.0	304.0	304.0	304.0
Tr=	20	25	30	35	40	45	50
día	Q(m ³ /s)						
0	304.0	304.0	304.0	304.0	304.0	304.0	304.0
1	678.4	693.2	705.0	714.8	723.3	730.5	737.0
2	1052.7	1062.3	1106.0	1125.6	1142.5	1157.0	1170.0
3	1084.1	1114.1	1138.0	1157.9	1174.9	1189.7	1202.9
4	1313.5	1352.2	1389.3	1409.3	1431.7	1451.1	1468.5
5	1427.2	1475.2	1514.0	1546.3	1574.2	1598.6	1620.1
6	1795.2	1873.8	1937.5	1990.1	2035.6	2075.4	2110.2
7	1570.8	1630.5	1678.6	1719.0	1753.7	1783.8	1810.7
8	1246.3	1281.9	1310.5	1334.4	1354.9	1372.7	1388.8
9	1186.9	1217.4	1241.7	1262.0	1279.3	1294.3	1307.7
10	1174.8	1210.7	1236.5	1263.5	1284.1	1302.1	1318.2
11	1118.0	1148.2	1172.4	1192.4	1209.5	1224.4	1237.6
12	711.0	726.1	738.2	748.2	756.8	764.2	770.8
13	304.0	304.0	304.0	304.0	304.0	304.0	304.0

Tabla 5.1 Hidrogramas asociados a diferentes periodos de retorno (Estación Azueta)

5.2 CAPACIDAD MÁXIMA DE CONDUCCIÓN DEL CAUCE

Para considerar el remanso del flujo del río desde su desembocadura en la laguna de Alvarado (cuando tiene el nivel más alto por marea debido a su cercanía al mar), se supuso que en el extremo de aguas abajo del tramo en estudio (donde confluye el río San Juan) se tiene una elevación del agua de 1 m sobre el nivel medio del mar.

Para las condiciones de flujo permanente en el tramo en estudio del río Papaloapan. Se estimó la capacidad de conducción de gastos del cauce. En la figura 5.3 se muestran las elevaciones máximas del agua obtenidas con el método descrito en el capítulo 2 junto con las de los bordos del río.

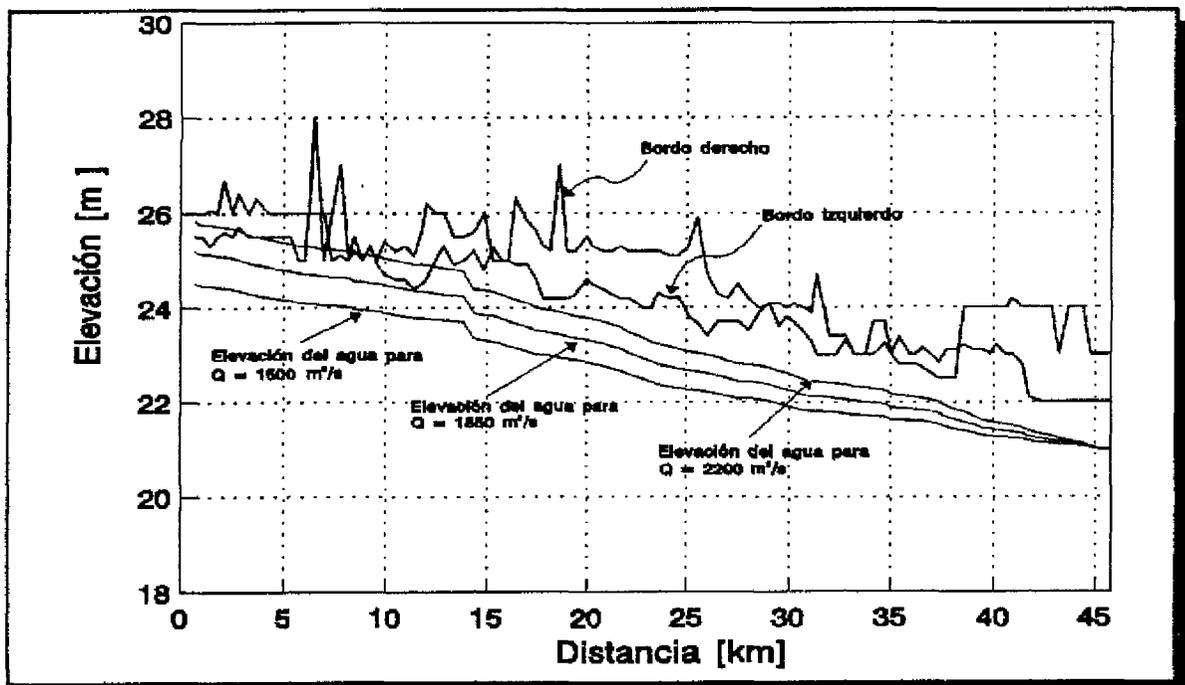


Figura 5.3 Elevaciones máximas alcanzadas por el nivel del agua, para varias avenidas con diferente periodo de retorno

Se encontró que la capacidad del río Papaloapan entre los afluentes Tesechoacán y San Juan, cuando la elevación del agua es de 1 m sobre el nivel del mar en su sección final, corresponde a $1850 \text{ m}^3/\text{s}$.

5.3 VOLÚMENES DE INUDACIÓN

Se consideró que el remanso en el río desde su desembocadura a la Laguna de Alvarado provocaba una elevación del agua de 1 m sobre el nivel medio del mar en el sitio donde ingresa el río San Juan y que era nula la descarga de las presas Miguel Alemán y Miguel de la Madrid. Además, se estimó que los ríos Valle Nacional y Obispo aportan un gasto constante igual a las 2/3 partes de la suma de sus escurrimientos máximos de estos ríos (tabla 5.2).

Tabla 5.2 Gastos Máximos de los ríos Valle Nacional Y Obispo

Periodo de retorno (años)	Valle Nacional (m³/s)	Obispo (m³/s)	Valle Nacional y Obispo (m³/s)	2/3 Valle Nacional y Obispo (m³/s)
2	1017.9	152.1	1170.0	929.5
5	1379.2	205.0	1584.2	1286.5
7	1494.4	221.0	1715.4	1412.7
10	1610.9	236.0	1847.8	1544.7
15	1738.1	253.9	1992.0	1692.2
20	1825.4	265.5	2080.9	1795.2
25	1891.9	274.2	2116.1	1873.8
30	1945.5	281.0	2226.7	1937.5
40	2028.4	292.0	2320.4	2035.8
50	2091.9	300.2	2392.1	2110.2

Se aplicó el modelo matemático de flujo no permanente descrito en el capítulo 3. Esto se hizo para los hidrogramas de la figura 5.2. De este modo, se obtuvo el volumen de inundación por desbordamiento del río que podría generar cada uno de los hidrogramas. En la figura 5.4 se muestran los hidrogramas en los extremos del río y en la tabla 5.3 se consignan los volúmenes de inundación obtenidos.

Se aprecia que para un periodo de retorno de 5 años se presenta un volumen de inundación del orden de 8.6 millones de m^3 por lo cual existirán volúmenes de inundación superiores a él con una probabilidad menor a 0.2 cada año (tabla 5.3).

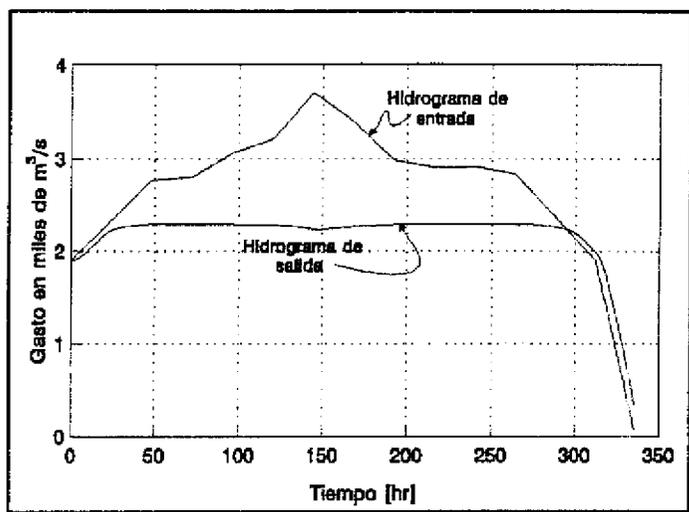


Figura 5.4 Hidrogramas a la entrada y a la salida del tramo de estudio, para un periodo de retorno de 50 años

Tabla 5.3 Volúmenes de inundación asociados a distintos periodos de retorno

Periodo de retorno T (años)	Probabilidad de excedencia $(1-1/T)$	Volúmenes de inundación $m^3 \times 10^6$
2	0.50	0.0
5	0.80	8.6
7	0.85	49.0
10	0.90	129.4
15	0.93	256.0
20	0.95	350.2
25	0.96	436.0
30	0.968	503.9
40	0.975	613.5
50	0.98	701.8

5.4 VOLUMEN DE INUNDACIÓN ANUAL

Con base en los volúmenes de inundación calculados para diferentes periodos de retorno (tabla 5.3) se obtuvo la figura 5.5. El área bajo curva mostrada en esta figura permitió definir el volumen esperado de inundación.

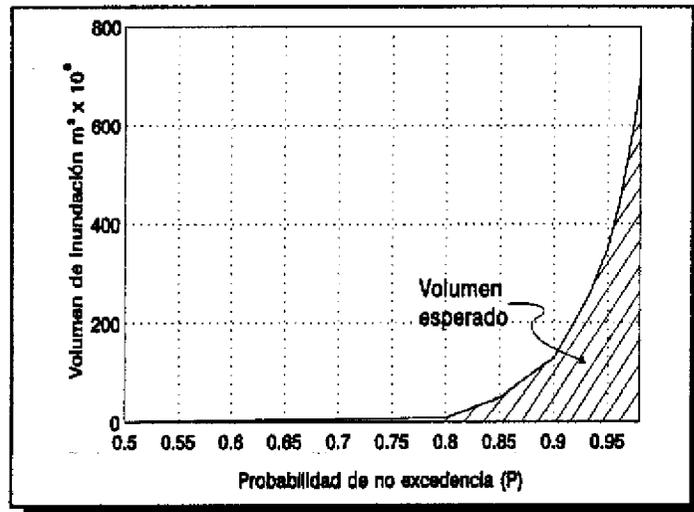


Figura 5.5 Volumen anual esperado de inundación

Así el volumen de inundación promedio que ocurre en cualquier año resultó ser igual a 33.3 m^3 . Este resultado verifica que la presencia de las presas Miguel Alemán y Miguel de la Madrid no evitan las inundaciones por desbordamiento en la parte baja del río Papaloapan, ya que la capacidad para conducir gastos en esta zona del río es pequeña en comparación con los gastos máximos anuales.

Para aumentar la capacidad de conducción de gastos en el río es necesario construir obras o bien realizar cambios en las secciones transversales del río. Estas últimas consisten en el dragado para ampliar el área hidráulica, aumentar la elevación de los bordos marginales o rectificar el río.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

El conocimiento del gasto máximo, volumen y forma de la avenida asociada a un periodo de retorno permite llevar a cabo distintos análisis hidráulicos. En los estudios de obras hidráulicas contribuye a evaluar su diseño u operación. También hace posible establecer los gastos que entran al cauce de un río y con base en ello, estimar el volumen de inundación por desbordamiento del agua sobre sus márgenes.

El cálculo de el gasto máximo que puede escurrir por el cauce de un río permite conocer la posibilidad de que existan inundaciones por desbordamiento del agua sobre las márgenes del río.

Simular el flujo en un cauce natural es útil para evaluar las consecuencias de construir obras en el río o llevar a cabo modificaciones del mismo.

Los métodos de tipo hidrológico para el tránsito de avenidas en cauces constituyen una herramienta valiosa para conocer la evolución de las avenidas a lo largo de los ríos. Mediante el cálculo del hidrograma en cierta sección de interés y el gasto máximo de conducción es posible mejorar el cálculo del volumen de inundación.

Con la aplicación del modelo matemático para simular el flujo no permanente se obtiene una adecuada estimación del volumen de inundación y los sitios por donde se presenta el desbordamiento del agua. Es preferible su aplicación a la de los otros métodos, aunque requiere mayor cantidad de información y de apoyo de cómputo.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

- 1) Bedient, Philip B; Huber, Wayne C; *"Hydrology and Floodplain Analysis"*; Addison-Wesley Publishing Company; USA, 1989.
- 2) Comisión del Papaloapan, SARH; *"Boletín Hidrométrico de la cuenca del río Papaloapan"*; 1954-1977, México.
- 3) Camargo H, Jaime; Villa Z, Raúl; *"Río Papaloapan, Ver. Estudios realizados en modelo hidráulico (1970-1974)"*; Comisión Nacional del Agua, Laboratorio de modelos fluviales de Ingeniería experimental; Mayo, 1992.
- 4) Cunge J. A., "Simulation des écoulements non permanents dans les rivières et canaux", Institut National Polytechnique de Grenoble, France, 1984.
- 5) Chaudry M. H., "Applied Hydraulic Transients", Van Nostrand Reinhold Co., Vancouver, Canadá, 1979.
- 6) Domínguez M, Ramón; Jiménez E, Martín; García J, Fermín; Salas S, Marco A, *"Reflexiones sobre las inundaciones en México"*; Centro Nacional de Prevención de Desastres (CENAPRED), Cuaderno de Investigación No. 4, México 1994
- 7) Fuentes M, Oscar A; Domínguez M, Ramón; Fuentes M, Guadalupe E; Osnaya R, Javier; Franco H, Luis E; Val S, Rafael, *"Estudio hidráulico del río Papaloapan desde las presas Miguel Alemán y Miguel de la Madrid hasta su desembocadura al mar"*; Instituto de Ingeniería, UNAM; México, 1994.

- 8) Henderson F. M., "Open Channel Flow", Mc Millan, New York, 1966.
- 9) Mahmood, K; Yevjevich, V; "*Unsteady flow in open channels*"; Water Resources Publications; USA, 1975.
- 10) Sánchez B, José L; Fuentes M, Oscar A; "*Método alternativo para la evaluación de efectos transitorios en canales*"; Comisión Federal de Electricidad; México, 1986.

APÉNDICE A

MÉTODO HIDRÁULICO PARA EL TRÁNSITO DE AVENIDAS

El movimiento del agua en el cauce natural se considera como flujo unidimensional. El cálculo se basa en esquema numérico propuesto por Sánchez y Fuentes (1986). Se limita al flujo en cauces y a volúmenes de control constantes en el espacio en los que solamente se modifica la profundidad hidráulica. El modelo matemático resuelve las ecuaciones de flujo no permanente a superficie libre en un cauce natural.

Las ecuaciones de flujo no permanente a superficie libre para cauces no prismáticos se consideran en la forma siguiente

$$\frac{\partial (Av)}{\partial x} = B \frac{\partial y}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - \left[\frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + S_f \right] \quad (\text{A.2})$$

En estas ecuaciones y representa a la elevación (m) de la superficie libre del agua respecto a un plano horizontal de referencia (corresponde a la suma del tirante más la elevación del fondo), A es el área hidráulica (m^2), v la velocidad media (m/s), B el ancho de superficie libre (m), g la aceleración de la gravedad (m/s^2), S_f la pendiente de la línea de energía (m/m); además, x representa a la distancia (m) y t al tiempo (s).

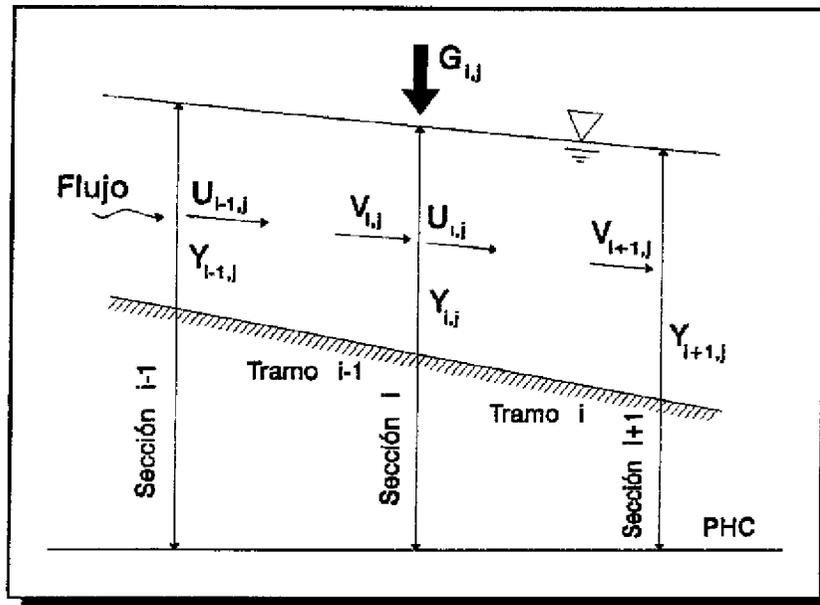


Figura A.1 Secciones en el río

Para la escritura en diferencias finitas de las ecuaciones A.1 y A.2 se toma en cuenta a los volúmenes de control mostrados en la figura A.1.

Como las elevaciones y las velocidades varían con el tiempo y la distancia, los distintos términos de las ecuaciones A.1 y A.2 se pueden escribir en diferencias finitas de la manera siguiente:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} \doteq \frac{\theta}{\Delta X_i} (Y_{i-1,j+1} - Y_{i,j+1}) + \frac{1-\theta}{\Delta X_i} (Y_{i+1,j} - Y_{i,j}) \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} \doteq \frac{V_{i+1,j+1} + U_{i,j+1}}{2g \Delta X_i} (V_{i+1,j} - U_{i,j}) \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2g \Delta t} [(U_{i,j-1} + V_{i+1,j+1}) - (U_{i,j} + V_{i+1,j})] \quad (\text{A.5})$$

$$S_f \doteq \frac{1}{4} \frac{n^2}{r_{i,j}^{4/3}} |U_{i,j} + V_{i+1,j}| (U_{i,j+1} + V_{i+1,j+1}) \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial Av}{\partial x} = \frac{A_{i+1,j} V_{i+1,j+1} - A_{i,j} U_{i,j+1}}{\Delta X_t} \quad (\text{A.7})$$

y

$$B \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{B_{i+1,j} + B_{i,j}}{4 \Delta t} [(Y_{i+1,j+1} + Y_{i,j+1}) - (Y_{i+1,j} + Y_{i,j})] \quad (\text{A.8})$$

(A.8)

donde θ es un factor de peso que sirve para calcular promedios ponderados en el tiempo con la finalidad de mejorar la aproximación de las derivadas temporales.

Sustituyendo las ecuaciones A.7 y A.8 en la ecuación A.1 y las ecuaciones A.3 a A.8 en la A.2 se obtiene

$$A_{i,j} U_{i,j+1} - A_{i+1,j} V_{i+1,j+1} = F_{i,j} (Y_{i+1,j+1} + Y_{i,j+1} - Y_{i+1,j} - Y_{i,j}) \quad (\text{A.9})$$

$$C_{i,j} U_{i,j+1} + C_{i,j} V_{i+1,j+1} = Y_{i+1,j+1} - Y_{i,j+1} + D_{i,j} \quad (\text{A.10})$$

donde

$$F_{i,j} = \frac{\Delta X_t}{4 \Delta t} (B_{i+1,j} + B_{i,j}) \quad (\text{A.11})$$

$$C_{i,j} = \frac{U_{i,j} - V_{i+1,j}}{2g\theta} - \frac{\Delta X_t}{2g\theta \Delta t} - \frac{\Delta X_t}{4 \theta} \frac{n^2}{r_{i,j}^{4/3}} |U_{i,j} + V_{i+1,j}| \quad (\text{A.12})$$

$$D_{i,j} = \frac{1 - \theta}{\theta} (Y_{i+1,j} - Y_{i,j}) - \frac{\Delta X_t}{2g\theta \Delta t} (U_{i,j} + V_{i+1,j}) \quad (\text{A.13})$$

Las ecuaciones A.9 y A.10 forman un sistema lineal no homogéneo en $U_{i,j+1}$ y $V_{i+1,j+1}$, su solución puede ser escrita como

$$U_{i,j+1} = P_{i,j} Y_{i+1,j+1} + Q_{i,j} Y_{i,j+1} + R_{i,j} \quad (\text{A.14})$$

$$V_{i,j+1} = S_{i,j} Y_{i+1,j+1} + T_{i,j} Y_{i,j+1} + W_{i,j} \quad (\text{A.15})$$

En estas expresiones

$$P_{i,j} = \frac{F_{i,j}}{A_{i,j} + A_{i+1,j}} + \frac{A_{i+1,j}}{C_{i,j} (A_{i,j} + A_{i+1,j})} \quad (\text{A.16})$$

$$Q_{i,j} = \frac{F_{i,j}}{A_{i,j} + A_{i+1,j}} - \frac{A_{i+1,j}}{C_{i,j} (A_{i,j} + A_{i+1,j})} \quad (\text{A.17})$$

$$R_{i,j} = \frac{D_{i,j} A_{i+1,j}}{C_{i,j} (A_{i,j} + A_{i+1,j})} - \frac{F_{i,j} (Y_{i+1,j} + Y_{i,j})}{A_{i,j} + A_{i+1,j}} \quad (\text{A.18})$$

$$S_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{C_{i,j} (A_{i,j} + A_{i+1,j})} - \frac{F_{i,j}}{A_{i,j} + A_{i+1,j}} \quad (\text{A.19})$$

$$T_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{C_{i,j} (A_{i,j} + A_{i+1,j})} + \frac{F_{i,j}}{A_{i,j} + A_{i+1,j}} \quad (\text{A.20})$$

$$W_{i,j} = \frac{D_{i,j} A_{i,j}}{C_{i,j} (A_{i,j} + A_{i+1,j})} + \frac{F_{i,j} (Y_{i+1,j} + Y_{i,j})}{A_{i,j} + A_{i+1,j}} \quad (\text{A.21})$$

Cuando la ecuación de continuidad se establece en la sección i (Figura A.1), se obtiene

$$A_{i,j} U_{i,j+1} + \theta G_{i,j+1} + (1 - \theta) G_j = A_{i,j} V_{i,j+1} \quad (\text{A.22})$$

sustituyendo las ecuaciones A.14 y A.15 en la A.22 se llega a

$$\begin{aligned}
& T_{i-1,j} Y_{i-1,j+1} + (Q_{i,j} - S_{i-1,j}) Y_{i,j+1} + P_{i,j} Y_{i+1,j+1} \\
& = W_{i-1,j} - R_{i,j} + \frac{1}{A_{i,j}} (\theta G_{i,j-1} + (1 - \theta) G_{i,j})
\end{aligned}
\tag{A.23}$$

Esta expresión se plantea en las secciones intermedias. Cuando el flujo es subcrítico, se requiere una ecuación adicional en cada uno de los extremos del río.

Las ecuaciones A.23 junto con las de las secciones correspondientes a sus extremos, forman un sistema de ecuaciones lineales tridiagonal, cuyas incógnitas son las elevaciones Y_i en la etapa de cálculo $j+1$. Una vez obtenidas las elevaciones, las velocidades de llegada ($V_{i,j+1}$) y de partida ($U_{i,j+1}$) son calculadas con las ecuaciones A.14 y A.15.