

PROGRAMA DE ANALISIS NO-LINEAL DE ESTRUCTURAS PLANAS  
DE CONCRETO REFORZADO

Inq. Orlando Gei Brealey                      Inq. Jorge Ruiz Munquín  
Francisco Mas & Asociados Ltda.              Francisco Mas & Asociados Ltda.

1. RESUMEN

El objetivo general de este trabajo es hacer un programa de computación que permita realizar un análisis no-lineal de una estructura plana de concreto reforzado utilizando el método estático de carga incremental monotónica (método inelástico por etapas).

Específicamente el programa:

- Determina la secuencia de formación de rótulas plásticas en los elementos empleando el método incremental,
- Encuentra los desplazamientos laterales por piso para cada incremento de carga que produce una articulación inelástica,
- Determina los cortantes en la base a lo largo de la falla del edificio, y,
- Calcula las fuerzas internas en vigas y columnas en todas las etapas de incremento de las fuerzas laterales.

El programa está escrito en Pascal y puede ser ejecutado en cualquier microcomputador compatible con IBM-PC, con un mínimo de 512 KB de memoria RAM.

## I. INTRODUCCION

### I.1 Antecedentes

En años anteriores, estudios realizados demostraron que la aplicación de un método estático incremental en marcos dúctiles de concreto daba resultados teóricos similares a los obtenidos en análisis dinámicos lineales y no-lineales. Específicamente se obtuvo muy buenas correlaciones en lo que se refiere a los patrones de formación de rótulas plásticas en elementos y en menor grado en la estimación de fuerzas internas y desplazamientos globales del sistema. A pesar de la similitud de los resultados nunca se ha automatizado el método por lo que su aplicación (por lo tedioso del método) se ha limitado a investigaciones particulares.

### I.2 Objetivos

#### I.2.1 Objetivo General

Hacer un programa que permita hacer un análisis no-lineal de una estructura plana de concreto reforzado utilizando el método estático de carga incremental monotónica (método inelástico por etapas).

#### I.2.2 Objetivos Especificos

- Determinar la secuencia de formación de rótulas plásticas en los elementos estructurales empleando el método incremental.
- Obtener los desplazamientos laterales y los cortantes en la base a lo largo de la falla del edificio.
- Determinar las fuerzas internas en vigas y columnas en cada incremento de carga lateral aplicada.
- Verificar la validez de los resultados obtenidos con el programa comparándolos con ejemplos de otros estudios.

## II. DESARROLLO TEORICO

### II.1 Análisis Estructural

Básicamente el programa realiza los análisis estáticos de marcos planos ortogonales, regulares o irregulares empleando el método de rigidez directo (método de los desplazamientos). Trabaja con todos los grados de libertad del sistema (tres por

nudo), lo que le permite considerar deformaciones por flexión, cortante y carga axial. Sin embargo, los grados de libertad se pueden modificar de modo que se limite la deformación lateral de la estructura a un solo grado de libertad por piso.

Al formar la matriz de rigidez, el programa saca ventaja del ancho de banda empleando un almacenamiento unidireccional tipo vector que le permite un ahorro de memoria y una mayor rapidez en las operaciones de resolución del sistema de ecuaciones lineales, ya que, adicionalmente, emplea el método de eliminación de Gauss que ha demostrado ser el más efectivo para resolver sistemas con varias condiciones de carga.

Las secciones de los elementos pueden ser cuadradas rectangulares o circulares. Supone que los elementos tienen una rigidez finita a la flexión en su longitud libre, y en sus extremos poseen nudos infinitamente rígidos que dependen de las dimensiones de los miembros. La consideración de los extremos rígidos implica en el cálculo de la matriz de rigidez la inclusión de una matriz de transformación que relacione las deformaciones de la parte flexible con los grados de libertad globales del nudo.

## II.2 Método Estático con carga incremental monotónica

El método estático con carga incrementada monotónicamente, es un método de análisis elástico por etapas que consiste en aplicar a la estructura un patrón normalizado de cargas laterales que se va incrementando hasta localizar por inspección, la formación de alguna rótula plástica en uno o varios elementos. Se supone que la falla del elemento se alcanza cuando la fuerza interna debida a las cargas laterales aplicadas iguala la resistencia nominal de la sección en ese punto. Cuando una rótula plástica es hallada, el tipo de conexión rígida se reemplaza por una unión de tipo articulada en el sitio de falla. Secuidamente, se aplica a la nueva estructura el patrón normalizado inicial de cargas laterales que se va aumentando hasta que con la superposición de los efectos de la estructura anterior se localiza una nueva rótula plástica. Posteriormente y en el sitio donde se encuentra la sección fallada se reemplaza la unión rígida por una conexión de tipo articulada.

El procedimiento se repite sucesivamente por adición de los efectos de cada una de las estructuras anteriormente formadas hasta obtener en el sistema un mecanismo de colapso.

Deben notarse dos aspectos básicos:

1. La introducción de articulaciones perfectas en la estructura además de la evidente degradación en la rigidez, implica que la sección tiene una capacidad infinita de rotación (similar a la de un gozne sin fricción) por lo que no se podrán incrementar los momentos flectores en el extremo del elemento. Esto último hace necesario la superposición de los esfuerzos internos acumulados en elementos de modo que se modele el comportamiento bilineal (elasto-plástico) supuesto en la sección.
2. El patrón incremental de cargas depende de cada uno de los

diferentes modos de vibración de la estructura y se aplica simultáneamente con la carga gravitacional estimada (carga permanente y temporal) en una condición de diseño o servicio. El empleo de un patrón de carga equivalente normalizado evita la combinación de esfuerzos en los elementos para los diferentes modos de análisis, lo que redundaría en una mayor rapidez de cálculo y en una menor utilización de la memoria del computador.

### II.3 Método de localización de rótulas plásticas

La localización de las rótulas plásticas en una estructura al aplicar pequeños incrementos de carga es un proceso iterativo que requiere de una extensa etapa de generación y procesamiento de información. Si se hace uso de la linealidad que existe en la respuesta de la estructura entre la formación de dos rótulas sucesivas, se puede desarrollar un método para ubicar la falla en alguno o varios elementos del edificio. Para una estructura dada (con o sin un estado de rótulas formado) es posible aplicar un patrón normalizado de carga lateral de magnitud arbitraria y luego encontrar para cada extremo de los elementos el factor por el cual se deben multiplicar las cargas laterales para que el momento en el elemento, iguale su momento nominal último. Esto evita el proceso sucesivo y si se quiere aleatorio de aplicación de fuerzas laterales en cada incremento, permitiendo además determinar el posible desfase que existe en el factor multiplicador, entre dos puntos de falla muy próximos.

#### II.3.1 Localización de rótulas en vigas

Tenemos que para un elemento viga  $i$  :

$$M_{i1} + F_{i1} * M_{a1} = M_{u1} \quad ( 1 )$$

o sea

$$F_{i1} = ( M_{u1} - M_{i1} ) / M_{a1} \quad ( 2 )$$

donde

$F_{i1}$  : factor multiplicador del patrón de carga lateral para alcanzar el momento último en el extremo 1 del elemento  $i$ ,

$M_{i1}$  : momento inicial (existente) antes de la aplicación de la carga lateral en el extremo 1 de la viga  $i$ ,

$M_{a1}$  : incremento en el momento flector del extremo 1 del elemento  $i$  debido al patrón horizontal de carga,

$M_{u1}$  : momento último (resistente nominal positivo o negativo) del elemento  $i$  en el extremo 1 considerado.

El factor de falla  $F$  se calcula para todos y cada uno de los extremos de los elementos del edificio, el menor (o menores) de ellos indicarán el punto de localización de la nueva rótula plástica.

La respuesta final para el incremento de carga arbitrario se obtiene multiplicando los momentos que se generan por el menor factor de falla  $F$ , adicionando las cargas existentes al inicio de la etapa. Posteriormente se modifica la matriz de rigidez de la estructura y se aplica de nuevo el patrón de carga lateral estática.

### II.3.2 Localización de rótulas en columnas

Para columnas es posible obtener expresiones similares a las de vigas en las que el momento resistente se exprese en función de la carga axial que actúa en el elemento.

Si suponemos un diagrama de interacción linealizado como se muestra en la figura 2 es posible obtener una ecuación de primer grado implícita que permita determinar el factor multiplicador de falla  $F_1$ .

Análogamente para un elemento columna  $i$ , tenemos:

$$F_{1i} = ( M_u(P_{f_t}) - M_{i1} ) / M_{a1} \quad ( 3 )$$

donde

$M_u(P_{f_t})$  : es el momento último de falla (positivo o negativo) cuando la carga axial en la columna es  $P_{f_t}$

$P_{f_t}$  : es la carga axial total (inicial y del incremento) existente en la columna  $i$ .

El diagrama de interacción linealizado define un espacio solución llamado Región Factible (RF). Todo punto par  $(M,P)$  que esté fuera de este límite será un punto de falla. Por simplicidad metodológica en la generación de la ecuaciones del método se definen tres zonas solución posibles: (ver fig. 2)

- ZONA 1 (FLEXO-COMPRESION PRIMARIA) falla frágil - no dúctil  
condición:  $P_1 < P(t) < P_2$

- si falla  $M^+$ :

$$M_2^+ * P(t) / (P_1 - P_2) + M_2^+ * P_1 / (P_1 - P_2) = M(+) \quad ( 4 )$$

- si falla  $M^-$ :

$$M_2^- * P(t) / (P_1 - P_2) + M_2^- * P_1 / (P_1 - P_2) = M(-) \quad ( 5 )$$

- ZONA 2 (FLEXO-COMPRESION BALANCEADA) falla dúctil  
condición:  $P_2 < P(t) < 0$

- si falla  $M^+$ :

$$( M_2^+ - M_0^+ ) / P_2 * P(t) + M_0^+ = M(+) \quad ( 6 )$$

- si falla  $M^-$ :

$$(M_2^- - M_0^-) / P_2 * P(t) + M_0^- = M(-) \quad (7)$$

- ZONA 3 ( FLEJO-TENSION )

condición:  $0 < P(t) < P_3$

- si falla M+:

$$(-M_0^+) / P_3 * P(t) + M_0 = M(+) \quad (8)$$

- si falla M-:

$$(-M_0^-) / P_3 * P(t) + M_0 = M(-) \quad (9)$$

Estas expresiones se remplazan en la ecuación ( 3 ) para obtener el valor del factor de falla  $F_i$ . La ecuación es una ecuación lineal implícita en  $F_i$  ya que la carga axial total  $P(t)$  depende a su vez de  $F_i$ :

$$P(t) = P_i + F_i * P_a \quad (10)$$

de donde

$$F_i = (Mu(P_i + F_i * P_a) - M_i) / M_a \quad (11)$$

Esta expresión se puede resolver por aproximaciones sucesivas por medio del siguiente algoritmo.

Algoritmo:

PASO 1: Definir el punto inicial de carga existente ( $M_i, P_i$ ) en el diagrama de interacción antes de aplicar el incremento de fuerzas.

PASO 2: Encontrar el incremento en el momento y carga axial ( $M_a, P_a$ ) que produce la aplicación del patrón de fuerza lateral en los elementos.

PASO 3: Calcular

$$P(t) = P_i + F_i * P_a$$

donde  $F_i$  se puede suponer inicialmente 0.1

PASO 4: Determinar el factor de incremento  $F_i'$  empleando el diagrama de interacción linealizado por medio de la expresión (11). Se sugiere por simplicidad metodológica emplear la zonificación propuesta anteriormente, para determinar el momento resistente  $M_u$ .

PASO 5: Se compara  $F_i$  y  $F_i'$  se dan dos posibilidades:

- si son diferentes se reinicia el paso 3 haciendo que  $F_i = F_i'$
- si son iguales se termina el procedimiento y la solución es  $F_i'$

El procedimiento se realiza tanto para momento positivo como para momento negativo.

## II.4 Suposiciones del método incremental

Las suposiciones pueden dividirse en limitaciones del modelado y limitaciones del análisis. Las limitaciones del modelado son limitaciones relacionadas simplificaciones del estudio y no necesariamente son limitaciones del método en sí.

### II.4.1 Limitaciones del modelado

- Se supone que los miembros están unidos por nudos tales que las intersecciones entre vigas y columnas son ortogonales, de modo que no se pueden contemplar elementos en diagonal.
- Se supone que los goznes plásticos se forman exclusivamente en los extremos de los elementos.
- Se emplean diagramas de interacción linealizados y se supone que una vez formada la rótula plástica esta permanece en esta condición ( $M=cte.$ ) a través de la posterior historia de carga. Debe recordarse que en la zona bajo la carga axial balanceada del diagrama de interacción, un incremento en la carga axial permite incrementos en el momento resistente. Sin embargo, este comportamiento es despreciado y se supone que una vez formada la rótula plástica en la columna ésta puede resistir más carga axial, pero no mayor momento flector.
- No se considera la influencia de marcos transversales en la respuesta de la estructura plana. Sin embargo, en caso de considerar un entrepiso infinitamente rígido podría generalizarse la aplicación del método a análisis tridimensionales.
- Se desprecia la degradación de la resistencia en las secciones (influencia del agrietamiento en la relación momento-curvatura, efecto Baushinger en el acero, etc). Adicionalmente se desprecian los cambios de rigidez que puedan producir las reversiones de momento.
- El análisis realizado es un análisis de primer orden, no se considera la influencia del efecto P-Delta.

### II.4.2 Limitaciones del análisis

- Se supone que la relación momento - curvatura es bilineal característico de un comportamiento elasto-plástico. Esta suposición implica una limitación del método pues en las secciones de concreto reforzado el comportamiento real no es perfectamente bi-lineal.
- Se supone que toda sección tallada tiene una capacidad infinita de rotación, similar a la de un gozne sin fricción. En realidad un elemento de concreto reforzado tiene una capacidad determinada, limitada por las características del concreto y el acero de refuerzo. Sin embargo debe hacerse notar que esta consideración también la hacen los códigos en la distribución de momentos.
- Se supone que el movimiento en la base es espacialmente uniforme y en la dirección paralela al eje del plano de carga. El método desprecia la componente vertical del movimiento.
- Se asume que los nudos son infinitamente resistentes.

### III. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA

Desde el punto de vista más general el programa puede estructurarse en siete etapas:

- 1- Entrada de datos de la estructura (propiedades físicas, geometría, etc.)
- 2- Introducción de las cargas (permanentes, temporales y patrón de sismo)
- 3- Análisis Estructural (planteamiento del sistema de ecuaciones lineales y resolución, cálculo de fuerzas internas, etc.)
- 4- Localización de rótulas plásticas (en vigas y columnas)
- 5- Rutina de mínimos (determina el mínimo (o mínimos) factor de falla que produce rótulas y las localiza dentro del marco)
- 6- Cálculo de los desplazamientos finales, cortantes en la base y fuerzas internas en los elementos estructurales
- 7- Transformación de la matriz de rigidez (inclusión de los efectos de formación de rótulas en la rigidez de los elementos)

Una vez formada una rótula plástica en algún elemento, se repite el procedimiento desde el paso 3-, hasta que se genere algún mecanismo de colapso. Inicialmente el programa realiza el análisis de las condiciones de carga temporal y permanente y los combina de modo que se obtienen las fuerzas iniciales en los elementos que permiten la aplicación del método incremental.

#### III.1 Opciones de análisis

El programa de análisis consta de tres opciones de análisis:

A) Análisis de varios marcos a la vez: el programa permite analizar varios marcos cuando son regulares en planta, considerando una fuerza sísmica paralela a la dirección de carga del sistema. La unión entre los diversos marcos se hace por medio de vínculos barra que limitan el desplazamiento lateral por piso y garantizan la compatibilidad de deformaciones a nivel de entrepiso.

B) Análisis de la estructura irregular: Inicialmente se forma una estructura regular de la cual se eliminan las columnas o vigas que desee el usuario. Internamente lo que hace el programa es tomar el arreglo de localización de elementos y colocar ceros en las casillas correspondientes a los nudos de los extremos de los elementos desechados. Posteriormente el programa sólo considera los elementos que poseen nudos con números no nulos en este arreglo.

Se deben tener en cuenta tres aspectos importantes al formar la estructura irregular:

- el número máximo de elementos a eliminar son 50 vigas y 50 columnas.

- al omitir elementos en el marco regular se pueden formar vigas y columnas mas largas que se denominan elementos especiales. Sin embargo, la entrada de datos de cargas, geometria y propiedades fisicas debe darse con respecto a la numeración de la estructura inicial.

- el hecho de que se formen elementos especiales, no elimina el grado de libertad que tiene el nudo adonde llegan los elementos ortogonales eliminados. Los resultados del análisis incluyen las fuerzas internas generadas en ese punto.

C) Variación del grado de libertad lateral por piso: Esta opción del programa es la más general y permite el análisis de una estructura regular o irregular considerando o no la deformación axial en vigas. Se permite incluir el efecto de un entrepiso rígido en todos, algunos o ninguno de los niveles de piso. Al emplear esta opción el usuario debe estar seguro de la validez de los supuestos del análisis.

### III.2 Cargas Aplicadas

Las cargas aplicadas en vigas (permanentes, temporales o de sismo) pueden ser distribuidas o concentradas. También se pueden aplicar cargas concentradas en los nudos, tales como momentos concentrados, cargas verticales concentradas y cargas laterales concentradas.

En el caso de la carga de sismo se dan dos opciones:

- considerar una carga lateral por piso en el caso de tener un entrepiso rígido, y,
- distribuir la carga de sismo por piso en todos los ejes de columna en caso de tener estructuras irregulares.

## IV. MANUAL DE USUARIO

Las unidades que se utilizan son: las toneladas (Ton) para las fuerzas y los metros (m) para las longitudes. Sólo en los datos de las resistencias de los materiales y en la información de las secciones transversales las unidades se dan en centímetros (cm) y en kilogramos (Kg).

El programa está estructurado de modo que se pide la información por bloques que se describen a continuación:

A. DATOS DE CONTROL DEL PROGRAMA se preguntan datos generales del tipo de modelo a generar como número de marcos, número de vanos, etc.

B. DATOS GENERALES DEL CONCRETO resistencia cilíndrica, peso unitario, y si se toman en cuenta las deformaciones por cortante el módulo de cortante del concreto.

C. DATOS DE LA ESTRUCTURA REGULAR el programa primero forma una estructura regular ortogonal que luego se corrige si se desea para formar un sistema irregular. Se pregunta por número de

pisos, número de alturas de columna, anchos de vano, etc.

D. CAMBIOS DE LA ESTRUCTURA REGULAR pregunta por el tipo de elemento a eliminar, en caso de viga el número de vano, o el número de eje si es una columna y el número de piso.

E. RIGIDEZ INFINITA DE LOS ENTREPISOS pregunta por el tipo de análisis que se desea, según las opciones explicadas anteriormente.

F. DEFINICION DE SECCIONES el tipo de sección transversal puede ser cuadrada, rectangular o circular. Se pueden definir 10 secciones como máximo y el programa calcula automáticamente la inercia y el área de la sección. Adicionalmente, la tipificación permite adjudicar los diversos tipos de secciones a las vigas y columnas de la estructura de acuerdo al tipo de sección que le fue asociado.

G. DEFINICION DE RESISTENCIAS NOMINALES pregunta por los momentos resistentes nominales positivos y negativos de todos los extremos de vigas. En caso de columnas, se tipifica la asignación de diagramas de interacción linealizados simétricos, utilizando cuatro pares de puntos (M,P).

H. DATOS DE CARGAS Las cargas que acepta el programa son cinco casos de carga temporal como máximo, carga permanente y carga de sismo. EN el análisis de carga permanente, el programa incluye automáticamente el peso propio de cada columna, ahorrando este cálculo al usuario. La entrada de datos de carga para los análisis de carga temporal y permanente se dividen en dos partes:

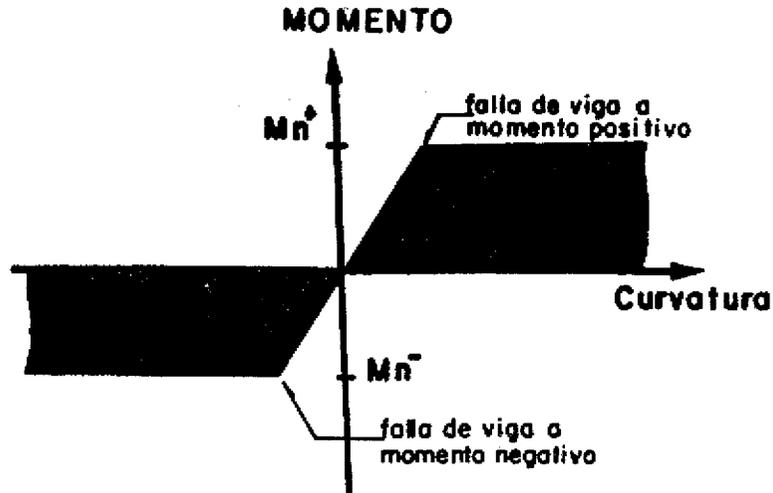
-cargas en vigas: la colocación de las fuerzas externas en las vigas se realiza con "arreglos de cargas". Un arreglo de cargas consiste en una carga distribuida a lo largo de toda la viga, una serie de cargas concentradas (5 como máximo) o una combinación de los dos tipos de carga. El programa pregunta el número de arreglos de carga en vigas, con el fin de asociar una serie de vigas a un arreglo determinado. Para ubicar la carga concentrada se debe dar la distancia desde el eje de columna izquierda hasta el punto de aplicación de la carga concentrada. La numeración de los vanos y los pisos es congruente con la utilizada a lo largo del programa.

-cargas concentradas en nudos: la ubicación de cada nudo de la estructura se da con el número de eje de columna y el número de piso. El programa permite cargas concentradas de momento, fuerzas laterales y fuerzas verticales en los nudos.

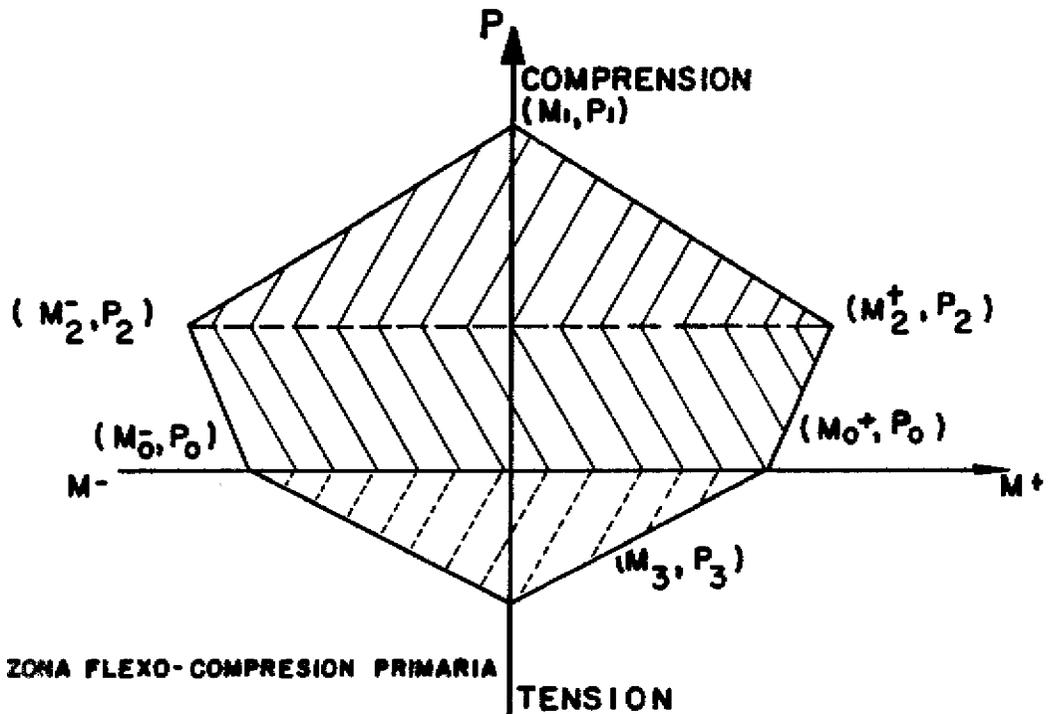
La salida de los datos del análisis estructural se ofrece con los datos ordenados en una tabla. Se dan las fuerzas internas obtenidas de análisis estructural, que son las fuerzas axiales, fuerzas cortantes y momentos flexores en los bordes del elemento. La convención de signos es positiva para los elementos de abajo a arriba, de izquierda a derecha, y siguiendo la regla de la mano derecha.

BIBLIOGRAFIA ESPECIFICA

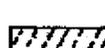
- 1- GEI B., Orlando "Aplicación y evaluación de un análisis estático no-lineal en una estructura real." Escuela Ingeniería Civil. UCR, 1988.
- 2-PAZ, Mario "Structural Analysis: Theory & Computation." Ed. McGraw Hill, E.U.A., 1986.
- 3-RUIZ M., Jorge "Programa general para el análisis estático y diseño de marcos de concreto reforzado." Escuela Ingeniería Civil, UCR, 1988.



**FIG. 1 DIAGRAMA MOMENTO CURVATURA**  
**COMPORTAMIENTO IDEALIZADO DE VIGAS**

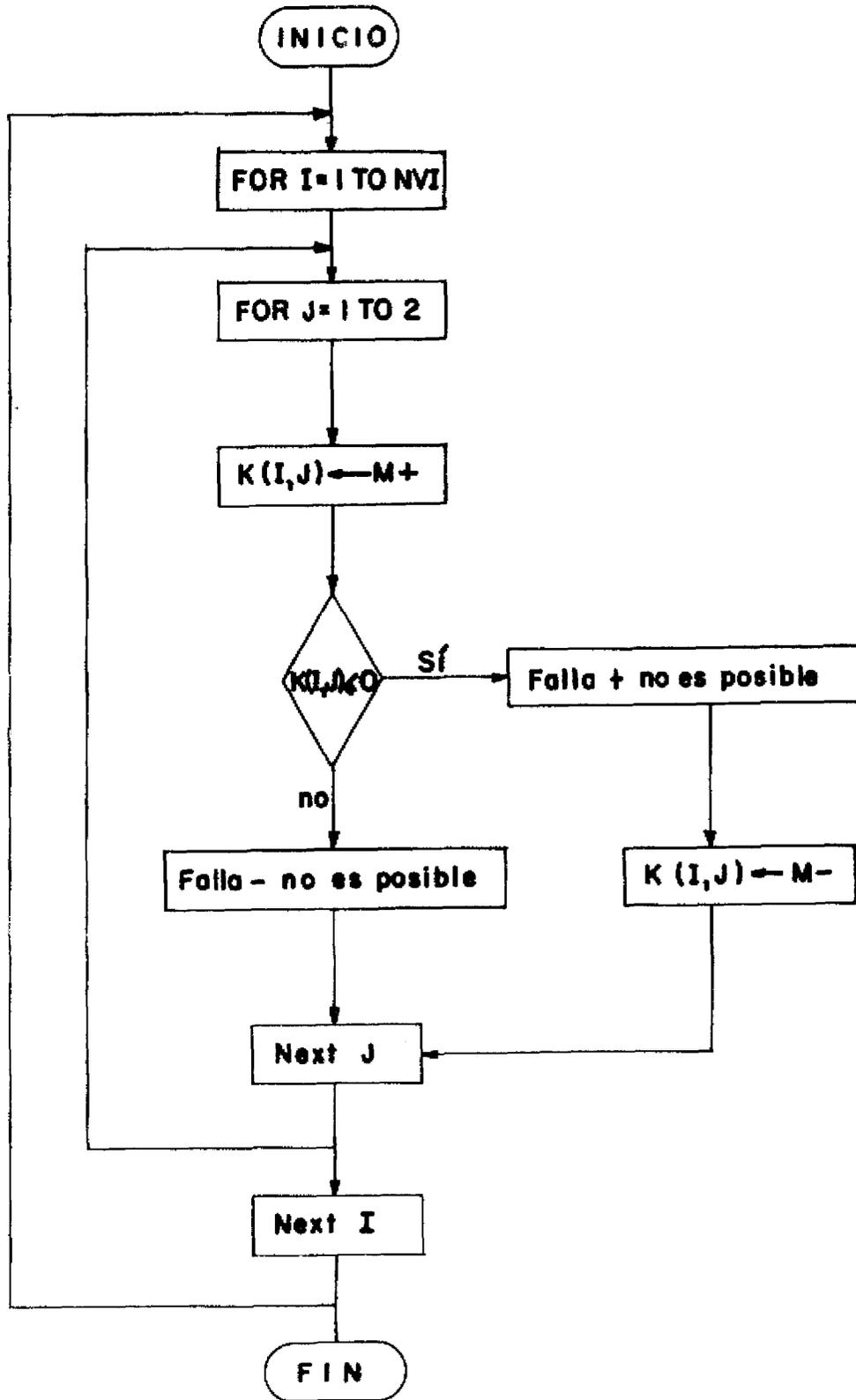


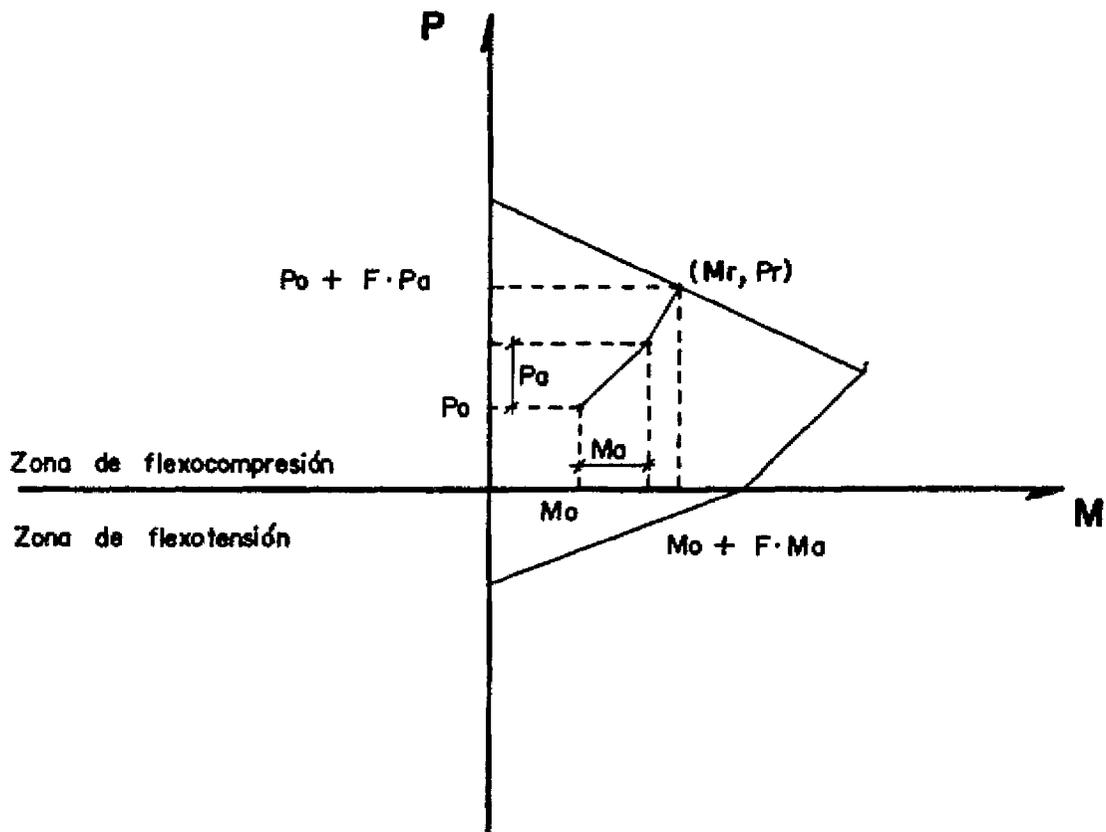
NOTA:

-  ① ZONA FLEXO-COMPRESION PRIMARIA
-  ② ZONA FLEXO-COMPRESION BALANCEADA
-  ③ ZONA FLEXO-TENSION

**FIG. 2 DIAGRAMA DE INTERACCION LINEALIZADO**  
**PARA COLUMNAS**

# LOCALIZACION DE ROTULAS EN VIGAS





**FIG. 3**

METODO DE LOCALIZACION DE ROTULAS  
PLASTICAS EN COLUMNAS.

# LOCALIZACION DE ROTULAS EN COLUMNAS

