$$\ln G_M(x) = A - B\exp(\alpha x)$$

incluye una constante A que le hace más similar a la expresión de Gutenber-Richter. Tanto Lomnitz-Lomnitz (1982) en su respuesta a Kijko, como el mismo Kijko, la consideran más conveniente y hablan de ella como una expresión no normalizada. Sin embargo nos preguntamos ¿qué sentido puede tener normalizar la cantidad $G_M(x)$?. Aclararemos este asunto.

Primero nótese que los dominio de las variables aleatorias τ, M_o, y M respectivamente son:

$$Dom\,\tau =]0;+\infty[\quad ; \quad Dom M_o =]0;+\infty[\quad ; \quad Dom M =]-\infty;+\infty[$$

El dominio de la magnitud de Richter son todos los reales por cuanto se trata de una medida relativa entre la amplitud de los sismos.

Bajo esta circunstancia sólo con la expresión corregida por Kijko para $f_M(x)$ es posible que se cumpla que el área bajo la integral de función de distribución, o sea la suma de probabilidades, tenga el valor 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_M(x)\,dx = -e^{-Bz}\Big|_0^{+\infty} = 1$$

En este sentido es obligatorio que A tome el valor cero. No hay otra posibilidad. Sin embargo es posible que aparezca la constante A, no con una normalización, sino con una aproximación. Para el efecto consideremos que la posibilidad de que aparezcan sismos con amplitudes de la onda S menores a la referencial, es decir de magnitudes negativas, es extremadamente pequeña, entonces debe cumplirse que:

$$\int_{-\infty}^{0} f_M(x)dx \approx 0 \qquad ; \qquad e^A \int_0^{+\infty} f_M(x)dx \approx 1$$

donde A, ahora sí, es una constante de normalización de la nueva distribución f_M. El valor de A resulta ser igual a B. Esto permite escribir el logaritmo de frecuencias acumuladas como:

$$\ln G_M(x) = B[1-\exp(\alpha x)]$$

Lomintz-Lomintz (1982) no son muy claros en su respuesta a Kijko sobre la introducción de la constante A. Obtienen también el valor $A = B$ pero lo ponen como algo incidental y además explícitamente comentan: "*Ninguna forma es normalizada; así parece ser que no existe argumento que obligue a preferir una u otra* ". En este sentido, el argumento de área igual a la unidad bajo la curva de distribución es bastante fuerte. Además aparece como un caso aproximado en el que se asigna probabilidad muy pequeña a las magnitudes negativas. Ello habrá que justificarlo, pues puede esperarse que el número de sismos de amplitud menor a la referencial, en determinadas circuntancias, sea significativo aúnque no sea detectable. Consecuentemente no se les podría asignar probabilidad nula.

Entre las observaciones de Kijko (1982), las más significativas son las siguientes: Kijko propone que debe existir un límite superior a la tensión máxima σ_o, como una variable aleatoria. Además indica que la forma como se acumulan las tensiones no debería ser necesariamente lineal. Entonces Kijko propone una función de distribución exponencial para las máximas tensiones acumuladas:

$$f_{\sigma_0}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad \text{si} \qquad 0 \le x \le \infty$$

con lo cual llega a demostrar que la función de distribución para la diferencia de tensiones acumuladas $\Delta\sigma = \sigma_0 - \sigma_1$, condicionada a tomar siempre valores positivos, es la siguiente:

$$f_{\sigma_1}(u|u \ge 0) = \lambda e^{-\lambda u}$$

concluyendo que "... *la distribución de densidad condicional de la diferencia de tensiones, no depende de la forma funcional de* $f_{\sigma_1}(y)$ ...". A continuación se demostrará que, bajo el supuesto de Kijko, la forma funcional $f_{\sigma_1}(y)$ no es arbitraria, sino una constante.

En principio el dominio de $\Delta\sigma$ es $Dom\,\Delta\sigma =]-\infty;+\infty[$ y como debe cumplirse que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\Delta\sigma}(u)du = 1$, ello equivale a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} du \cdot \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda y} f_{\sigma_1}(y) dy = 1$$

Pero la primera integral diverge a $+\infty$, de modo que la segunda debe tender a cero. Fácilmente se reconoce que la segunda integral es la transformada de Laplace de $f_{\sigma_1}(y)$ y se anulará sólo si $f_{\sigma_1}(y)$ es identicamente a la función nula, pero esto no puede ocurrir porque no se cumpliría que $\int_0^{+\infty} f_{\sigma_1}(y)dy = 1$.

Si $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} f_{\sigma_1}(y)dy$ es una constante diferente de cero, entonces debe restringirse el borde inferior de la primera integral (que es el que genera la divergencia al infinito). Sea este borde igual a $-C_1$, entonces se obtiene:

$$\int_{-C_1}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} du \cdot \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda y} f_{\sigma_1}(y) dy = 1$$

que equivale a la igualdad:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda y} f_{\sigma_1}(y) dy = e^{-\lambda C_1}$$

y esta es la transformada de Laplace de la función $f_{\sigma_1}(y) = \delta(y - C_1)$, donde $\delta(z)$ es la función delta de Dirac definida como:

$$\delta(z) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad z = 0 \\ 0 & \text{si} \quad z \neq 0 \end{cases}$$

Por lo tanto se concluye que:

i. La probabilidad encerrada por cualquier intervalo finito que contenga la constante C_1 siempre será 1, por pequeño que sea, y si el intervalo no contiene a C_1 la probabilidad será nula. Entonces σ_1 es constante, además positiva debido al dominio de σ_1.

ii. El dominio de $\Delta\sigma$ tiene un borde negativo: $Dom\Delta\sigma = [-C_1; +\infty[$.

iii. La función de distribución de $\Delta\sigma$ es: $f_{\Delta\sigma}(u) = \lambda e^{-\lambda(u+C_1)}$.

Esta situación además implica que es factible determinar la forma funcional del proceso de carga, esto es $\Delta\sigma = \Delta\sigma(\tau)$. Se cumple que:

$$f_\tau = f_{\Delta\sigma} \left| \frac{d\Delta\sigma}{d\tau} \right|$$

El proceso de acumulación de tensiones supone que $\frac{d\Delta\sigma}{d\tau} \geq 0$ y además la variación de $\Delta\sigma$ es nula al inicio de cada proceso, o sea $\Delta\sigma(0) = 0$. Como se conocen las funciones de distribución f_τ y $f_{\Delta\sigma}$, se obtiene la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{\tau_o} e^{-\tau/\tau_o} = \lambda e^{-\lambda(\Delta\sigma + C_1)} \frac{d\Delta\sigma}{d\tau}$$

que al integrarla sobre la condición inicial dada, se obtiene la siguiente solución:

$$\Delta\sigma(\tau) = -\frac{1}{\lambda} \ln\left[e^{-\tau/\tau_o} + e^{-\lambda C_1} - 1 \right] - C_1$$

Es interesante notar que a partir de este modelo se impone una restricción al tiempo de carga máximo, pues el corchete debe ser positivo. Sin embargo resulta criticable un hecho importante. Admitir una probabilidad $P(u < 0) \neq 0$ significa asignar probabilidad no nula a un evento donde $\sigma_1 > \sigma_0$, y como $\sigma_1 = C_1$ es una constante, la falla tectónica en lugar de liberar energía formando una onda por la

acumulación positiva de tensiones, tendría que absorver la onda violando el principio de entropia. En otras palabras, es indispensable que
$P(u \geq 0) = 1$, o sea:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda y} f_{\sigma}(y)\,dy = e^{-\lambda C_1} = 1$$

Y esto significa que el valor de mínima tensión deba ser nulo. Al remplazar este resultado en el proceso de carga se obtiene la forma funcional de una linea recta:

$$\Delta \sigma(\tau) = \frac{1}{\lambda \tau_o}\tau = k\tau$$

Entonces Kijko (1982), plantea un supuesto que no descarta el modelo original de Lomnitz-Lomintz (1979). De todos modos las observaciones de Kijko siguen siendo válidas con lo cual queda un tema pendiente: la construcción de un modelo más apegado a la realidad.

LAS DIFICULTADES CONCEPTUALES DE LOS MODELOS TRUNCADOS

Las razones por las cuales se han optado por modelos truncados inferior y superiormente son las siguientes. Una magnitud extremedamente grande en la medida de un sismo implica también grandes cantidades de energía. Una magnitud infinita implicaría también la liberación de infinita energía, lo cual es físicamente imposible. Por lo tanto se hace necesario definir una magnitud máxima que dependerá de la región, máxima longitud de falla, tipo de materiales o datos históricos. Al momento de definir la magnitud de mínima homogeneidad se busca el punto de inflexión de la distribución acumulada, a partir del cual la gráfica se empieza a comportar linealmente. Se supone que el catálogo de sismos está incompleto, en la región inferior a la magnitud mínima, debido en algunas ocasiones a la falta de capacidad de la red para detectar sismos de magnitudes pequeñas.

En la construcción del modelo, sea continuo o por clases, se genera una función de distribución en la que asigna probabilidades diferentes de cero exclusivamente a intervalos que contengan segmentos que estén dentro de la región del catálogo completo (entre el mínimo y el máximo). Con este diseño los modelos presentan las siguientes dificultades.

i. Los modelos truncados asignan probabilidad de ocurrencia cero a eventos que realmente sí ocurren, a todos aquellos detectados bajo la magnitud de mínima homogeneidad. Es decir el modelo no se ajusta a la realidad. El momento que, para estimar el valor del parámetro *b*, se eliminan los datos fuera de la región del catálogo completo, lo que se está haciendo es ajustar la realidad al modelo y no el modelo a la realidad. Thomas Kuhn (1962), en su libro La Estructura de Las Revoluciones Científicas, sostiene que la tendencia del ser humano muchas veces es mantener el paradigma resistiendo incluso a datos reales que lo contradigan. Esta situación puede estar ocurriendo en el caso de los modelos truncados. Hasta el momento no hemos encontrado razones teóricas de peso que asignen probabilidades nulas a eventos que sí ocurren los cuales, además, serían muy numerosos y por ello muy probables.

ii. Un aspecto que consideramos indispensable que se aclare es si la región del catálogo completo coincide o no con el rango de sensibilidad de la red sismológica. A priori no puede considerarse la una como definición de la otra. Si, por ejemplo, la red tiene la capacidad de detectar todos los eventos que ocurran con magnitudes iguales o superiores a uno, y la graficación de las frecuencias acumuladas implica un punto de mínima homogeneidad, supongamos de valor dos, entonces mal podríamos decir que el catálogo está completo a partir de la magnitud dos. ¿Pues, qué habría pasado con todos los sismos entre magnitudes uno y dos?. ¿Dónde están?. De ocurrir una situación como esta, debería afirmarse que el catálogo está completo desde magnitud uno, aunque no coincida el mínimo del rango de sensibilidad con el punto de mínima homogeneidad. Con esto último, la conclusión inmediata sería que el modelo de Gutenberg-Richter no se ajusta a la realidad en la región de bajas magnitudes. No es difícil encontrar autores con magnitudes de mínima homogeneidad relativamente altas, por ejemplo, Guo – Ogata (1997), estudian muestras con mínima homogeneidad entre 2.5 y 3.3. Bender (1987) presenta datos con mínima homogeneidad de 3.7. En Ecuador para datos de la región del Pisayambo, el valor de mínima homogeneidad es 3. En todos los casos, queda la inquietud pendiente de cuál es la sensibilidad de la red.