

MINIMIZACION DE LA REFLEXION DE ONDA EN LAS FRONTERAS USANDO EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA LA SOLUCION DE LA ECUACION DE ONDA ELASTICA

ALFREDO GHISAYS, LUIS MONTES V.
ROBINSON QUINTANA, SANDRA CÉSPEDES, & GABRIEL PÉREZ

RESUMEN

Para estudiar el comportamiento de una onda se recurre al modelamiento numérico de la ecuación de onda en un entorno que representa el medio físico donde se transmite la perturbación. Por necesidad de disminuir el costo computacional de la simulación se limitan las dimensiones del modelo, lo cual trae como consecuencia la reflexión de la onda en estos bordes, surgiendo en las secciones como reflexiones fantasmas. En este trabajo se presenta una solución de la ecuación de onda por elementos finitos en la cual se atenúan las reflexiones en los contornos, usando una matriz de atenuación relacionada con parámetros elastodinámicos del medio.

Se encontró una relación entre los parámetros α y β con la frecuencia de la señal, y se estimaron valores óptimos para estos parámetros.

Un software de modelamiento numérico en elementos finitos fue implantado, siendo necesario considerar no solo los aspectos pertinentes a la estabilidad y sensibilidad del método sino a la eliminación de estas reflexiones fantasmas en los bordes del modelo.

1. INTRODUCCIÓN

En un intento por comprender la influencia de las capas someras en los registros de campo se desarrolló un software de modelamiento numérico en elementos finitos para el cual fue necesario considerar no solo los aspectos pertinentes a la estabilidad y sensibilidad del método sino de la eliminación de estas reflexiones fantasmas en los bordes del modelo.

Este trabajo muestra como atenuar las reflexiones en las fronteras y de esta forma obtener un mejor registro sintético en el modelamiento de una zona mediante un modelo matemático y computacional

Este es un caso único, ya que se trata de aplicar las teorías existentes (MEF) a la Topografía particular de un País como Colombia revestido de muchas zonas montañosas con pendientes muy inclinadas y estructuras del subsuelo muy particulares.

La ecuación de onda elástica simula el transporte de la perturbación mecánica en un medio infinito, al utilizar esta ecuación en un modelo computacional se hace necesario limitar la dimensión del modelo lo que introduce reflexiones espurias en sus bordes. La solución a este inconveniente es colocar en las fronteras condiciones absorbentes que eliminen las reflexiones no deseadas. El problema de minimizar las reflexiones en las fronteras ha sido abordado por diversos autores: en un primer enfoque Higdon (1987) utiliza la relación de velocidades de las ondas de fase y de grupo para calcular parámetros que se introducen en la matriz de amortiguamiento en una región cerca de la frontera. Un segundo enfoque considera una onda unidireccional en los bordes que se mueve en dirección del borde del modelo, suprimiendo así la onda reflejada que se mueve en dirección contraria (Clayton et al, 1977; Carcione, 1994). Otra estrategia logra una reducción gradual en la amplitud de la onda en la zona de atenuación vecina al borde, mediante la aplicación una función de peso que tiene un valor de uno al inicio de la zona de atenuación y cero en el borde (Cerjan, 1985). Estos enfoques asumen la escogencia de un factor de absorción en la zona de atenuación que no tiene relación física con las propiedades elastodinámicas del medio. Una última estrategia considera el factor de absorción en términos de la matriz de masa, la matriz de rigidez y dos parámetros relacionados con la frecuencia dominante de la señal sísmica y del coeficiente de atenuación del material (Caughey, 1960). En nuestro caso mostraremos como minimizar las reflexiones en las fronteras optimizando los valores de coeficiente de amortiguación y los parámetros de atenuación de acuerdo a las frecuencias del pulso emitido.

2 Solución de la Ecuación de onda por elementos finitos

La ecuación que modela el comportamiento de la onda en elementos finitos se expresa mediante la expresión (1), ver Segerlin (1984), Zienkiewicz (1992):

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{f\} \quad (1)$$

donde $[M]$ es la matriz de masa, $[K]$ la de rigidez, $\{f\}$ es el vector de fuerza y $\{u\}$ el campo de perturbación de la onda en cada elemento del medio.

La solución de la ecuación de onda expresada en (1) por elementos finitos es:

$$u^l = 2u^l - u^{l-2} - \Delta t^2 [M]^{-1} \{[K]u^{l-1} + f\} \quad (2)$$

donde u^l , u^{l-1} y u^{l-2} representan el campo de onda en cada elemento del medio estimado en los tiempos l , $l-1$ y $l-2$.

En una región donde se atenúe la energía de la onda, la ecuación (1) se ve modificada por la introducción de un término que incorpore ese efecto, ese coeficiente de amortiguación se expresa mediante una matriz de amortiguamiento:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{f\} \quad (3)$$

ecuación cuya solución viene dada por la expresión

$$u^l = \left\{ \frac{[M]}{\Delta t} + \frac{[C]}{2} \right\}^{-1} \left[\frac{[M]}{\Delta t} \{2u^{l-1} - u^{l-2}\} + \frac{[C]}{2} u^{l-2} - \Delta t [K] u^{l-1} + \{f\} \Delta t \right] \quad (4)$$

Matemáticamente es complicado determinar la matriz de amortiguación C , ya que se desconoce la matriz de viscosidad μ , por lo tanto se formula la hipótesis de que la solución amortiguada sea una combinación lineal de la solución no amortiguada y en consecuencia la matriz $[C]$ sea una combinación lineal de la matriz de rigidez y de masa.

La matriz de amortiguamiento ha sido desarrollada por Caughey (1960) como una serie de términos dependientes de la matriz de masa y la matriz de rigidez. Al tomar los dos primeros términos de esta serie se obtiene el factor amortiguamiento de Rayleigh, asociados a la matriz de amortiguamiento C mediante la relación: (Bathe, 1978; Clough, 1975)

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (5)$$

donde α y β son los parámetros a estimar.

El cálculo en la descomposición modal requiere determinar todos los modos y valores propios, de hecho solo se toma un número limitado de ellos ya que las respuestas a las frecuencias más altas esta críticamente amortiguada y carece de importancia. El amortiguamiento critico se representa como una función dependiente básicamente de la frecuencia:

$$C = \frac{1}{2\omega} (\alpha + \beta\omega^2) \quad (6)$$

donde ω es la frecuencia dominante en la señal.

Para las rocas cristalinas, metamórficas, sedimentarias y roca meteorizada poseen un coeficiente de decaimiento con valores que fluctúan entre 0.05 y 0.3

La relación (2) indica que un aumento en la frecuencia conduce a un aumento en el coeficiente de amortiguamiento para las altas frecuencias como se explico en el parágrafo anterior.

El amortiguamiento crítico se considera un valor extremo de una función, por lo cual se puede hallar una relación entre los parámetros involucrados y la frecuencia. Calculando el máximo de la función se tiene:

$$\frac{\partial C}{\partial \omega} = -\frac{\alpha}{2\omega^2} + \frac{\beta}{2} \quad (7)$$

de donde al igualar a cero por ser extremo, se deduce la relación

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \quad (8)$$

Con el objetivo de obtener una simulación en la que se atenúen las reflexiones en los bordes del modelo, éste se construye con una zona central donde se la onda es no amortiguada y otra región envolvente donde se incluye le término de amortiguamiento, tal como se observa en al figura (1).

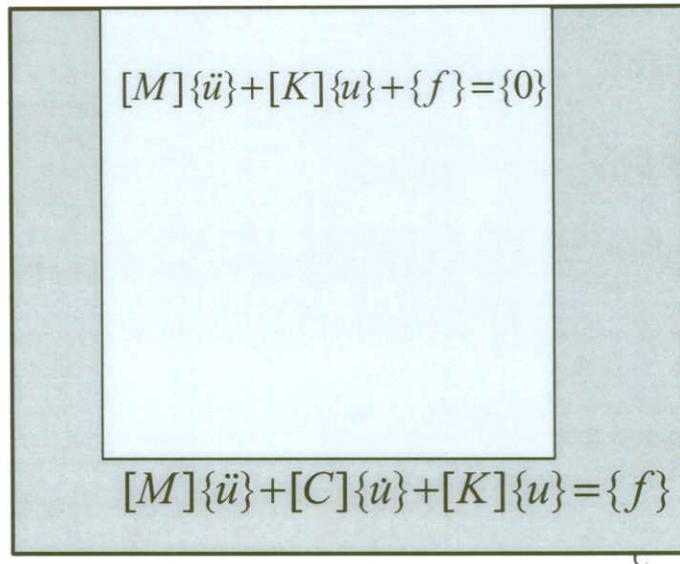


Fig. 1 Muestra dos zonas: La zona clara es libre de atenuaciones y la zona oscura representa el medio amortiguado.

3. SIMULACIÓN

Se consideró un sistema finito con dos zonas, una zona libre de atenuaciones y otra con absorción. Mediante el programa PreproBox se construyó una grilla con 50x50 divisiones, es decir con 3481 nodos y 3364 elementos, con una velocidad de grupo de 1000 m/s, ver Figura (1). Se garantizó que cumpliera con las condiciones de Courant y se usó como fuente sintética un pulso de Ricker con frecuencia dominante de 40 hz.

Para simular la perturbación y su transmisión en el medio emulado por la grilla, se diseñó e implantó un Software de modelamiento en elementos finitos desarrollado en C++ y bajo Diffpack, una herramienta de dominio público hasta 1996 de la Universidad de Oslo. En este producto se consideró no solo los aspectos pertinentes a la estabilidad y sensibilidad del método sino de la eliminación de estas reflexiones fantasmas en los bordes del modelo.

El análisis espectral del pulso de Ricker indicó que las frecuencias que mas contribuyen a la formación de pulso se hallan en el rango de 40 a 50 hz para obtener un valor para α de 13,346 y $\beta = 6,5 \times 10^{-3}$.

Para el cálculo de α y β usamos la ecuación (6) que muestra una dependencia del coeficiente de amortiguamiento C con la frecuencia, según la fuente usada los valores para la frecuencia mas altas fluctúan entre 60 y 64 hz. Al aplicarlas en la ecuación (6) para deducir los parámetros α y β se observa una reducción en el valor de α (14,686) mientras que β se mantiene en un orden de magnitud de 10^{-3} .

3.1 Análisis de resultados

Primero se simuló el comportamiento de la onda en un medio homogéneo e isotrópico libre de atenuaciones, obteniendo la propagación libre de la onda a través de toda la grilla como se observa en el Snapshot de la figura (2). En ella se observa la propagación de la onda en un medio elástico, homogéneo sin muchas atenuaciones es claro ver que se mantiene la amplitud de la misma conservándola inclusive en la frontera. La gama de colores indica un rango de amplitudes entre 10^{-6} a 10^{-8} m.