

UNA EXPLOSIÓN PITAGÓRICA DE VALORES ENTEROS

José Lisandro Reyes
Departamento de Física,
UNAH

RESUMEN

El deseo de tener una fórmula que me proporcionase una cantidad infinita de triángulos enteros de valores enteros sin ser semejantes entre sí me ayudó mucho para lograr mi propósito.

Fue así como en el año 1984, en mi segundo año de universidad, encontré una fórmula recurrente que me proporcionaba una cantidad infinita de triángulos de valores enteros, lo cual me dejó muy satisfecho. Sin embargo, posteriormente encontré otros triángulos que no pertenecían a esta familia de triángulos de valores enteros. En este artículo presento esas fórmulas recurrentes, esperando que alguien pueda aprovecharlas y mejorarlas.

SUMMARY:

The search of a formula that provided me with an infinite number of whole triangles with whole values dissimilar amongst themselves.

In 1984, undergoing my second year of university studies, I came across a recurring formula that provided me with an infinite number of whole-value triangles. Afterwards, I found other triangles that did not belong to this family of triangles. With this writing I submit these recurring formulas, for perusal and possible improvement by others.

LA PRIMERA FAMILIA

(LA DIFERENCIA ENTRE LA
HIPOTENUSA Y EL CATETO PAR
ES UNO)

Se desea resolver el problema de encontrar triángulos rectángulos de valores enteros que no sean semejantes al ya muy conocido triángulo 3,4,5. La pregunta es, ¿existe algún conjunto solución? ¿será válido para todo número o sólo para los números impares?

Según Pitágoras, el cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre

sus catetos, es decir que $a^2 + b^2 = c^2$. No hay duda que con esta relación se pueden encontrar infinitos triángulos, pero no necesariamente de valores enteros.

Tomemos en consideración los triángulos $a=3$, $b=4$, $c=5$ y $a=5$, $b=12$ y $c=13$. Tomemos en consideración que ambos triángulos tienen una característica notable; la diferencia entre la hipotenusa y el cateto par es 1. Sustituyendo esta relación en el Teorema de Pitágoras, hacemos que $c=b+1$ y sustituimos

$$a^2 + b^2 = (b + 1)^2$$
$$a^2 + b^2 = b^2 + 2b + 1^2$$

$$a^2 = 2b + 1$$
$$b = (a^2 - 1) / 2$$

entonces, de forma semejante
 $c = (a^2 + 1) / 2$

Tal relación tan simple, permite encontrar infinitos triángulos rectángulos de valores enteros, siendo el dominio para 'a' todos los números impares. Como ejemplo, consideremos que $a=7$, entonces:
 $b = (7^2 - 1) / 2 = 24$

entonces:
 $c = b + 1 = 24 + 1 = 25$

tales valores cumplen el teorema de Pitágoras, ya que:

$$7^2 + 24^2 = 25^2$$

En forma semejante, tomemos en cuenta $a=11$, entonces:

$$b=(11^2-1)/2$$

$$b=60$$

por lo que: $c=61$;
sustituyendo se obtiene:

$$11^2+60^2=61^2$$

$$121+3600=3721$$

De esta forma, si se cumple para estos casos.

COROLARIO

Todo número impar «a» puede formar al menos un triángulo rectángulo de valores enteros. Si es «a» uno de los catetos, entonces se cumple que el valor de la hipotenusa es $c=(a^2+1)/2$, el cateto opuesto es $b=c-1$ y además $b=(a^2-1)/2$.

LA SEGUNDA FAMILIA

Posteriormente descubrí el triángulo cuyos catetos 15 y 8 con hipotenusa 17 formaban un triángulo rectángulo cuya diferencia entre la hipotenusa y el cateto de valor par no era la unidad y no era semejante a ninguno del grupo con diferencia igual a '1'. En este caso, la diferencia era de «9» y pensé que de alguna manera habían más familias que generaban triángulos totalmente nuevos, diferentes y que la condición de que la diferencia entre la hipotenusa y el cateto par debía ser un número con una raíz exacta. La siguiente pregunta era, ¿Cuál era el dominio de los catetos de valor impar para cada familia?

Estudiando este trián-

gulo, la fórmula resultaría:

$$a^2+b^2=c^2$$

$$a^2+b^2=(b+9)^2$$

$$a^2+b^2=(b^2+18b+81)$$

$$a^2=18b+81$$

$$(a^2-81)/18=b$$

Ya que el valor de a^2 debe ser mayor que 81, 'a' puede valer 15. Así $(15)^2=225$. Sustituyendo en la ecuación de recurrencia

$$(15^2-81)/18=8$$

El triángulo se forma entonces así:

$$a=15 \quad \text{el cateto impar}$$

$$b=8 \quad \text{el cateto par}$$

$$c=17 \quad \text{la hipotenusa}$$

¿Cuál sería el siguiente valor de a? Posiblemente el valor de 'a' es 21, el cual se muestra en la siguiente ecuación, tomando $a=21$:

$$b=(21^2-81)/18=20$$

entonces:

$$c=b+9=20+9=29$$

$$c=29$$

Hemos formado así el triángulo $a=21$, $b=20$ y $c=29$ el cual cumple con el teorema de Pitágoras y todos sus lados son valores enteros. El siguiente triángulo formado por esta familia es $a=27$, $b=36$ y $c=45$.

LA TERCERA FAMILIA

En esta familia la diferencia entre la hipotenusa y el cateto par es de 25, y como vemos, también posee raíz cuadrada exacta. La ecuación

resulta ser entonces:

$$b=(a^2-25^2)/50$$

$$c=b+25$$

El valor posible para 'a' es 35, sustituyendo el valor de a obtenemos:

$$b=(35^2-25^2)/50$$

$$b=12$$

así que:

$$c=b+25$$

$$c=37$$

El conjunto $a=25$, $b=12$ y $c=37$ cumplen con el teorema de Pitágoras, ya que $37^2=25^2+12^2=1369$.

Se preguntarán ¿cuáles son las siguientes familias? En la tabla No. 1 se muestran las primeras 6 familias completas y varios de los triángulos formados por ellas y como verá, ningún triángulo es semejante a ningún otro, todos cumplen con el teorema de Pitágoras y poseen solamente valores enteros. Observe que el lado impar de cada primer triángulo de las familias se obtiene multiplicando el J de esa familia por la siguiente y que se incrementan en un valor de $2 \times (J)$. Como ejemplo, veamos en la familia 3, $j=5$ y en la familia 4 $j=7$. El valor del cateto impar del primer elemento es $5 \times 7 = 35$ y en los siguientes triángulos se incrementa en $5 \times 2=10$, así los 3 siguientes lados impares son 45, 55 y 65.

PROPIEDADES DE LOS TRIÁNGULOS RECTÁN-

GULOS DE VALORES ENTEROS

1. La diferencia entre la hipotenusa y el lado par es un número que posee raíz cuadrada exacta y es un número impar.
2. El cateto impar del primer triángulo de cada familia se obtiene multiplicando la raíz de la diferencia de la hipotenusa y el lado par de esa familia por la diferencia de la hipotenusa y el cateto par de

la familia inmediata superior.

3. Los incrementos de cada lado impar de cada familia se obtienen multiplicando por 2 la raíz de la diferencia de la hipotenusa y el cateto par.
4. Se pueden obtener infinitos triángulos rectángulos de valores enteros que cumplen con el Teorema de Pitágoras y también se pueden obtener infinitas familias y ninguno es semejante con otro.

Notación Matemática

Sea b_{nm} (cateto par), a_{nm} (cateto impar) y c_{nm} (hipotenusa) los elementos de un triángulo rectángulo con valores enteros de la n -ésima familia del m -ésimo triángulo de tal familia, entonces:

$$a_{nm} = (J_n)(J_n + 2) + 2J(m-1)J$$

$$b_{nm} = (a_{nm}^2 - (J)^4) / (2(J)^2)$$

$$c_{nm} = (a_{nm}^2 + (J)^4) / (2(J)^2)$$

donde J es la raíz cuadrada de la diferencia de la hipotenusa y el lado par.

TABLA DE FAMILIAS DE TRIÁNGULOS

Familia No.1 (Josesiano=1, Diferencia=1)			Familia No.2 (Josesiano=3, Diferencia=9)			Familia No.3 (Josesiano=5, Diferencia=25)			Familia No.4 (Josesiano=7, Diferencia=49)			Familia No.5 (Josesiano=9, Diferencia=81)			Familia No.6 (Josesiano=11, Diferencia=121)		
a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
3	4	5	15	8	17	35	12	37	63	16	65	99	20	101	143	24	145
5	12	13	21	20	29	45	28	53	77	36	85	117	44	125	165	52	173
7	24	25	27	36	45	55	48	73	91	80	109	135	72	153	187	84	205
9	40	41	33	56	65	65	72	97	105	88	137	153	104	195	209	120	241
11	60	61	39	80	89	75	100	125	119	128	169	171	140	221	231	160	281
13	84	85	45	108	117	85	132	157	133	158	205	199	180	261	253	204	325
15	112	113	51	140	149	95	168	193	147	196	245	207	224	305	275	252	373
17	144	145	57	176	185	105	208	233	161	240	289	225	272	353	297	304	425
19	180	181	63	216	225	115	252	277	175	288	337	243	324	405	319	380	481
21	220	221	69	260	269	125	300	325	189	340	389	261	380	461	341	420	541
23	264	265	75	308	317	135	352	377	203	396	445	279	440	521	383	484	605
25	312	313	81	360	369	145	408	433	217	456	505	297	504	585	395	552	673
27	364	365	87	416	425	155	468	493	231	520	569	315	572	653	407	624	745
29	420	421	93	476	485	165	532	557	245	588	637	333	644	725	429	700	821
31	480	481	99	540	549	175	600	625	259	660	709	351	720	801	451	780	901
33	544	545	105	608	617	185	672	697	273	736	785	369	800	881	473	864	985
35	612	613	111	680	689	195	748	773	287	816	865	387	884	965	495	952	1073
37	684	685	117	768	777	205	828	853	301	900	949	405	972	1053	517	1044	1165
39	760	761	123	868	877	215	912	937	315	988	1037	423	1064	1145	539	1140	1261
41	840	841	129	980	989	225	1000	1025	329	1080	1129	441	1160	1241	561	1240	1361
43	924	925	135	1096	1105	235	1092	1117	343	1176	1225	459	1280	1361	583	1344	1465
45	1012	1013	141	1216	1225	245	1188	1213	357	1276	1325	477	1384	1465	605	1452	1573
47	1104	1105	147	1336	1345	255	1288	1313	371	1380	1429	495	1472	1553	627	1564	1685
49	1200	1201	153	1456	1465	265	1392	1417	385	1488	1537	513	1584	1665	649	1680	1801
51	1300	1301	159	1576	1585	275	1500	1525	399	1600	1649	531	1700	1781	671	1800	1921
53	1404	1405	165	1696	1705	285	1612	1637	413	1716	1765	549	1820	1901	693	1924	2045
55	1512	1513	171	1820	1829	295	1728	1753	427	1836	1885	567	1944	2025	715	2052	2173
57	1624	1625	177	1944	1953	305	1848	1873	441	1960	2009	585	2072	2153	737	2184	2305
59	1740	1741	183	2068	2077	315	1972	1997	455	2088	2137	603	2204	2285	759	2320	2441
61	1860	1861	189	2192	2201	325	2100	2125	469	2220	2269	621	2320	2401	781	2480	2601
63	1984	1985	195	2316	2325	335	2232	2257	483	2356	2405	639	2480	2561	803	2604	2725
65	2112	2113	201	2440	2449	345	2368	2393	497	2496	2545	657	2624	2705	825	2752	2873
67	2244	2245	207	2568	2577	355	2508	2533	511	2640	2689	675	2772	2853	847	2904	3025
69	2380	2381	213	2696	2705	365	2652	2677	525	2788	2837	693	2924	3005	869	3060	3181
71	2520	2521	219	2824	2833	375	2800	2825	539	2940	2989	711	3080	3161	891	3220	3341
73	2664	2665	225	2952	2961	385	2952	2977	553	3096	3145	729	3240	3321	913	3384	3505
75	2812	2813	231	3080	3089	395	3108	3133	567	3256	3305	747	3404	3485	935	3552	3673
77	2964	2965	237	3208	3217	405	3268	3293	581	3420	3469	765	3572	3653	957	3724	3845
79	3120	3121	243	3336	3345	415	3432	3457	595	3588	3637	783	3744	3825	979	3900	4021
81	3280	3281	249	3464	3473	425	3600	3625	609	3760	3809	801	3920	4001	1001	4080	4201
83	3444	3445	255	3592	3601	435	3772	3797	623	3936	3985	819	4100	4181	1023	4264	4385
85	3612	3613	261	3720	3729	445	3948	3973	637	4116	4165	837	4284	4365	1045	4452	4573